#2 (ДЗ)

Задание 18 № 541827

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

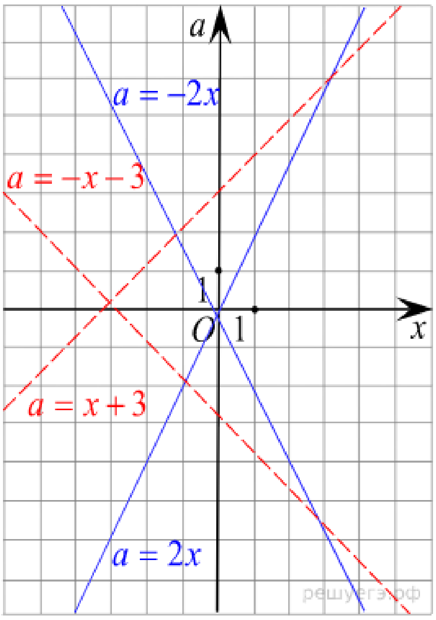
$$\frac{4x^2-a^2}{x^2+6x+9-a^2}=0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Преобразуем уравнение, используя формулы сокращённого умножения:

$$\frac{4x^2-a^2}{x^2+6x+9-a^2}=0 \Leftrightarrow \frac{(2x-a)(2x+a)}{(x+3)^2-a^2}=0 \Leftrightarrow \frac{(2x-a)(2x+a)}{(x+3-a)(x+3+a)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=2x, \\ a=-2x, \end{array}\right. \\ a\neq x+3, \\ a\neq -x-3. \end{cases}$$



Изобразим решение полученной системы на плоскости xOa. Графиком системы (изображено синим) будет совокупность двух прямых $a=2x$, $a=-2x$, исключая точки, которые лежат на прямых $a=x+3$, $a=-x-3$, а именно: точки $(-1;\ 2)$, $(-1;\ -2)$, $(3;\ 6)$, $(3;\ -6)$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два различных корня при

$$a<-6;\ -6<a<-2;\ -2<a<0;\ 0<a<2;\ 2<a<6;\ \text{и}\ a>6.$$

Ответ: $(-\infty;\ -6)\cup(-6;\ -2)\cup(-2;\ 0)\cup(0;\ 2)\cup(2;\ 6)\cup(6;\ +\infty)$.

Аналоги к заданию № 541383: 541827 Все

Источник: ЕГЭ по математике 10.07.2013. Вторая волна. Центр. Вариант 602., ЕГЭ−2020. Досрочная волна 27.03.2020. Вариант 2.

Спрятать решение · Прототип задания · В избранное (18) · Поделиться · Видеокурс · Курс Д. Д. Гущина · Сообщить об ошибке · Помощь

#3 (ДЗ)

6. Задание 18 № 526329

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2+4x-a}{15x^2-8ax+a^2}=0$$

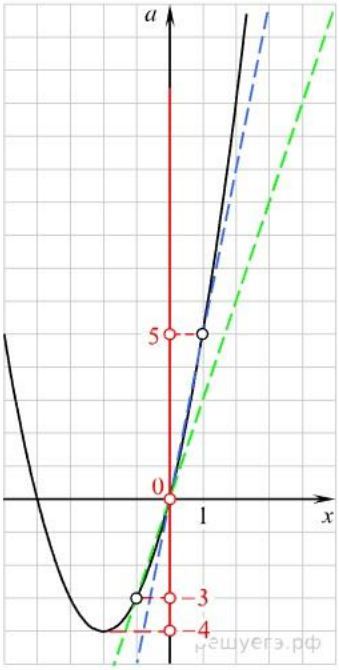
имеет ровно два различных решения.

Решение.

Заметим, что

$$\frac{x^2+4x-a}{15x^2-8ax+a^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x-a=0, \\ 15x^2-8ax+a^2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=x^2+4x, \\ (5x-a)(3x-a)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=x^2+4x, \\ a\neq 3x, \\ a\neq 5x. \end{cases}$$

Изобразим решение в системе координат xOa. Графиком системы, а значит, и графиком исходного уравнения является парабола с выколотыми точками.



Ординаты точек пересечения параболы $a=x^2+4x$ и прямой $a=3x$ найдём из уравнения $a=\frac{a^2}{9}+\frac{4a}{3}$. Получаем $a=0$ или $a=-3$.

Ординаты точек пересечения параболы $a=x^2+4x$ и прямой $a=5x$ найдём из уравнения $a=\frac{a^2}{25}+\frac{4a}{5}$. Получаем $a=0$ или $a=5$.

Ровно два решения исходное уравнение имеет при $-4<a<-3$, $-3<a<0$, $0<a<5$, $a>5$.

Ответ: $(-4;-3)\cup(-3;0)\cup(0;5)\cup(5;+\infty)$.

#4 (ДЗ)

6. Задание 18 № 526344

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{2a-x^2-3x}{x+a^2}=0$$

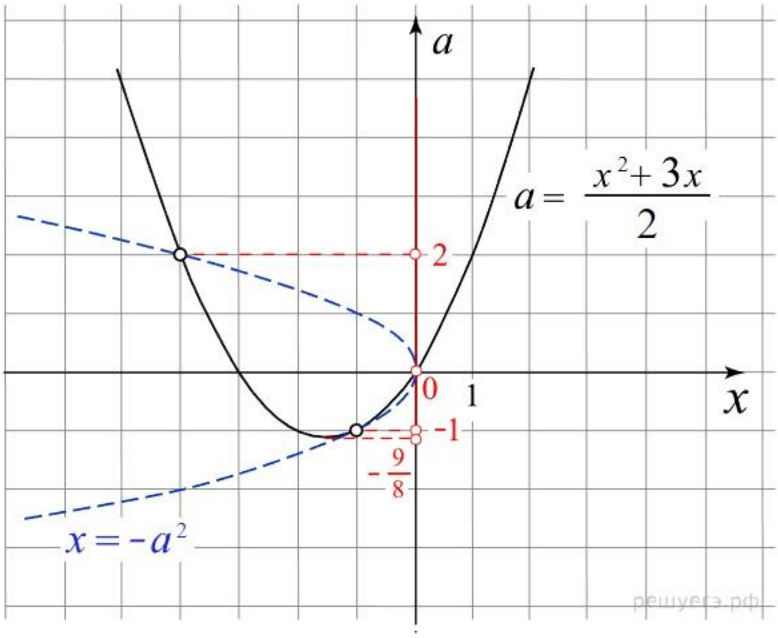
имеет ровно два различных корня.

Решение.

Заметим, что

$$\frac{2a-x^2-3x}{x+a^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-x^2-3x=0, \\ x+a^2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{x^2+3x}{2}, \\ x\neq -a^2 \end{cases}$$

Изобразим решение в системе координат xOa. Графиком системы, а значит, и графиком исходного уравнения является парабола с выколотыми точками.



Ординаты точек пересечения парабол $a=\dfrac{x^2+3x}{2}$ и $x=-a^2$ найдём из уравнения $a=\dfrac{a^4-3a^2}{2}$.

$$a^4-3a^2-2a=0;$$
$$a(a^3-3a-2)=0;$$
$$a(a+1)(a^2-a-2)=0;$$
$$a(a+1)^2(a-2)=0.$$

Получаем $a=-1$ или $a=0$ или $a=2$.

Вершина параболы $a=\dfrac{x^2+3x}{2}$ в точке $\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{9}{8}\right)$

Ровно два решения исходное уравнение имеет при $-\dfrac{9}{8}<a<-1,\ -1<a<0,\ 0<a<2,\ a>2.$

Ответ: $a\in\left(-\dfrac{9}{8};\ -1\right)\cup(-1;\ 0)\cup(0;\ 2)\cup(2;\ +\infty).$

#7 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2+x+a}{x^2-2x+a^2+6a}=0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Корнями исходного уравнения являются корни уравнения $x^2+x+a=0$, для которых выполнено условие $x^2-2x+a^2+6a\neq 0$.

Уравнение $x^2+x+a=0$ задаёт на плоскости Oxa параболу $a=-x^2-x$ с вершиной в точке $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$. Значит, это уравнение имеет два корня при $a<\frac{1}{4}$, имеет один корень при $a=\frac{1}{4}$ и не имеет корней при $a>\frac{1}{4}$.

Уравнение $x^2-2x+a^2+6a=0$ задаёт окружность ω радиусом $\sqrt{10}$ с центром в точке $(1;-3)$.

Координаты точек пересечения окружности ω с параболой $a=-x^2-x$ являются решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2-2x+a^2+6a=0, \\ a=-x^2-x; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-2x+x^4+2x^3+x^2-6x^2-6x=0, \\ a=-x^2-x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\left(x^3+2x^2-4x-8\right)=0, \\ a=-x^2-x; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x-2)(x+2)^2=0, \\ a=-x^2-x. \end{cases}$$

Значит, окружность ω пересекается с параболой $a=-x^2-x$ в точках $(0;0)$, $(-2;-2)$ и $(2;-6)$.

Следовательно, условие $x^2-2x+a^2+6a\neq 0$ выполнено для корней уравнения $x^2+x+a=0$ при всех a, кроме $a=-6$, $a=-2$ и $a=0$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два корня $a<-6$; $-6<a<-2$; $-2<a<0$; $0<a<\frac{1}{4}$.

Ответ: $a<-6$; $-6<a<-2$; $-2<a<0$; $0<a<\frac{1}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точки $a=\frac{1}{4}$	3
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a=-6$, $a=-2$ и / или $a=\frac{1}{4}$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения окружности и параболы (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

#8 (ДЗ)

18Н от Елены Ильиничны Хажинской

Решение.

Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2 - 6x + a^2 - 4a = 0\ (*) \\ x^2 - a^2 \neq 0 \end{cases}$.

Квадратное уравнение$(*)$имеет два различных корня, когда $\frac{D}{4} = 9 - a^2 + 4a > 0$, т. е.

$a^2 - 4a - 9 < 0; a \in \left(2 - \sqrt{13}; 2 + \sqrt{13}\right)$.

$x^2 \neq a^2$, т. е. $x \neq a, x \neq -a$.

Если $x = a$, то $a^2 - 6a + a^2 - 4a \neq 0\ ; 2a^2 - 10a \neq 0; a \neq 0; a \neq 5$.

Если $x = -a$, то $a^2 + 6a + a^2 - 4a \neq 0\ ; 2a^2 + 2a \neq 0; a \neq 0; a \neq -1$.

Следовательно, данное уравнение имеет ровно два различных корня при

$\boldsymbol{a \in \left(2 - \sqrt{13}; -1\right) \cup (-1; 0) \cup (0; 5) \cup \left(5; 2 + \sqrt{13}\right)}$

Ответ: $\boldsymbol{\left(2 - \sqrt{13}; -1\right) \cup (-1; 0) \cup (0; 5) \cup \left(5; 2 + \sqrt{13}\right)}$

#9 (ДЗ)

18 При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{|4x| - 2x - 3 - a}{x^2 - 2x - a} = 0$$

имеет ровно 2 различных решения.

Источники:
Основная волна 2019
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)

$\Leftrightarrow \begin{cases} ① \ |4x| - 2x - 3 - a = 0 \\ ② \ x^2 - 2x - a \neq 0 \end{cases}$

Решим уравнение ① $|4x| - 2x - 3 - a = 0$

1 случай

Если $x = 0$, то $|4\cdot 0| - 2\cdot 0 - 3 - a = 0$

$a = -3$

$\Rightarrow$ при $a = -3$ будет единств. решение $x = 0$

$\Rightarrow a \neq -3$

2 случай

Если $x > 0$, то $4x - 2x - 3 - a = 0$

$2x - 3 - a = 0$

$2x = 3 + a$

$x = \frac{3+a}{2}$

x должен быть больше нуля

$\Rightarrow \frac{3+a}{2} > 0 \quad | \cdot 2$

$3 + a > 0$

$a > -3$

$\Rightarrow$ при $a > -3$ будет положительный корень $x = \frac{3+a}{2}$

3 случай

Если $x < 0$, то $-4x - 2x - 3 - a = 0$

$-6x = 3 + a$

$x = \frac{-3-a}{6}$

x должен быть меньше нуля

$\Rightarrow \frac{-3-a}{6} < 0 \quad | \cdot 6$

$-3 - a < 0$

$a > -3$

$\Rightarrow$ при $a > -3$ будет отрицательный корень $x = \frac{-3-a}{6}$

$\Rightarrow$ При $a > -3$ получаем положительный корень $x_1 = \frac{3+a}{2}$ и отрицательный корень $x_2 = \frac{-3-a}{6}$

Они не совпадают, т.к. один из них положит., а другой отриц.

Найдём, при каких a $x_1 = \frac{3+a}{2}$ и $x_2 = \frac{-3-a}{6}$ удовл. нер-ву ②

② $x^2 - 2x - a \neq 0$

Если $x_1 = \frac{3+a}{2}$, то $\left(\frac{3+a}{2}\right)^2 - \cancel{2}\cdot\frac{3+a}{\cancel{2}} - a \neq 0 \quad | \cdot 4$

$(3+a)^2 - 4\cdot(3+a) - 4a \neq 0$

$9 + 6a + a^2 - 12 - 4a - 4a \neq 0$

$a^2 - 2a - 3 \neq 0$

$a \neq 3 \quad a \neq -1$

Если $x_2 = \frac{-3-a}{6}$, то $\left(\frac{-3-a}{6}\right)^2 - \cancel{2}\cdot\left(\frac{-3-a}{\cancel{6}_3}\right) - a \neq 0 \quad | \cdot 36$

$(3+a)^2 + 12\cdot(3+a) - 36a \neq 0$

$9 + 6a + a^2 + 36 + 12a - 36a \neq 0$

$a^2 - 18a + 45 \neq 0$

$a \neq 3$

$a \neq 15$

Ответ: $(-3; -1) \cup (-1; 3) \cup (3; 15) \cup (15; +\infty)$.

#10 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{|x-6|+a-6}{x^2-10x+a^2}=0$$

имеет ровно два различных корня.

Источники:
Основная волна 2019
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)

$\Longleftrightarrow \begin{cases} |x-6|+a-6=0 & ① \\ x^2-10x+a^2\neq 0 & ② \end{cases}$

Решим уравнение ① $|x-6|+a-6=0$

$|x-6|=6-a$

Чтобы было 2 корня уравнения, нужно чтобы $6-a>0$

$a<6$

1 случай (раскрытия модуля) Если $x-6=0$, то $x=6$ единственный

$|6-6|+a-6=0$

$a=6$

$\Rightarrow$ При $a=6$ будет единств. корень $x=6$

$\Rightarrow a\neq 6$

2 случай Если $x-6>0$, то $x>6$

$x-6+a-6=0$

$x_1=12-a$

3 случай Если $x-6<0$, то $x<6$

$-x+6+a-6=0$

$x_2=a$

x_1 и x_2 не совпадают, т.к. $x_1>6$, $x_2<6$

$\Rightarrow$ При $a<6$ имеем два корня. Осталось узнать, при каких a, эти корни удовлетворяют нер-ву ②

Если $x_1=12-a$, то

$x^2-10x+a^2\neq 0$

$(12-a)^2-10\cdot(12-a)+a^2\neq 0$

$144-24a+a^2-120+10a+a^2\neq 0$

$2a^2-14a+24\neq 0 \quad |:2$

$a^2-7\cdot a+12\neq 0$

$a\neq 3 \quad a\neq 4$

Если $x_2=a$, то

$x^2-10x+a^2\neq 0$

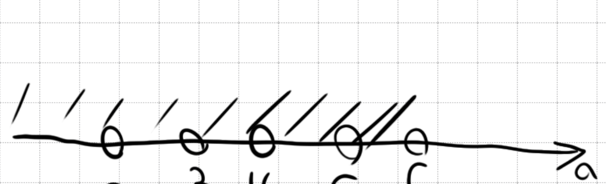
$a^2-10a+a^2\neq 0$

$2a^2-10a\neq 0 \quad |:2$

$a^2-5a\neq 0$

$a\cdot(a-5)\neq 0$

$a\neq 0 \quad a\neq 5$



Ответ: $(-\infty;6)\setminus\{0;3;4;5\}$.

#11 (ДЗ)

18 Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\frac{x^2 - a(a+1)x + a^3}{\sqrt{2 + x - x^2}} = 0$$

имеет два различных корня.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ① \; x^2 - a\cdot(a+1)\cdot x + a^3 = 0 \\ ② \; 2 + x - x^2 > 0 \end{cases}$$

ИДЕЯ РЕШЕНИЯ

Чтобы исходное уравнение имело два различных корня, нужно чтобы уравнение ① имело 2 различных корня и оба этих корня должны удовл. нер-ву ②

ПЛАН РЕШЕНИЯ

$\boxed{1}$ Решим неравенство ②

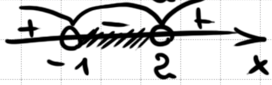
$\boxed{2}$ Найдём корни уравнения ①

$\boxed{3}$ Решим систему $\begin{cases} D_{①} > 0 \\ x_1 \text{ удовл. нер-ву ②} \\ x_2 \text{ удовл. нер-ву ②} \end{cases}$

$\boxed{1}$

$2 + x - x^2 > 0 \quad | \cdot (-1)$

$x^2 - x - 2 < 0$



$\boxed{2}$

$x^2 - a\cdot(a+1)\cdot x + a^3 = 0$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = a\cdot(a+1) = a^2 + a \\ x_1 \cdot x_2 = a^3 \end{cases}$

$x_1 = a^2 \qquad x_2 = a$

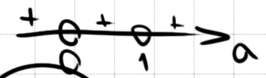
$\boxed{3}$

$\begin{cases} ③ \; a^2\cdot(a+1)^2 - 4\cdot a^3 > 0 \\ ④ \; -1 < a^2 < 2 \\ ⑤ \; -1 < a < 2 \end{cases}$

③ $a^2\cdot(a^2 + 2a + 1 - 4a) > 0$

$a^2\cdot(a^2 - 2a + 1) > 0$

$a^2\cdot(a-1)^2 > 0$

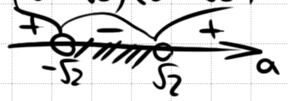


$a \neq 0$
$a \neq 1$

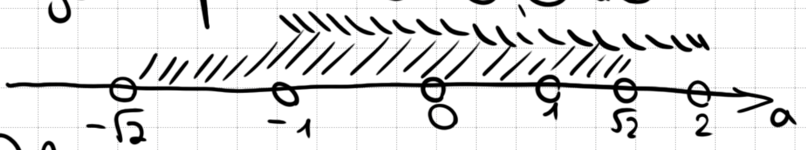
④ $a^2 < 2$

$a^2 - 2 < 0$

$(a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2}) < 0$



Найдём пересечение ③, ④ и ⑤:



Ответ: $(-1;0) \cup (0;1) \cup (1;\sqrt{2})$.

#13 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\left(x^2+x+a\right)^2=2x^4+2\left(x+a\right)^2$$

имеет единственное решение на отрезке $\left[0;2\right]$.

Решение.

Уравнение $\left(x^2+x+a\right)^2=2x^4+2(x+a)^2$ равносильно уравнениям $x^4+2x^2(x+a)+(x+a)^2=2x^4+2(x+a)^2$, $\left(x^2-x-a\right)^2=0$ и $x^2-x-a=0$.

Положим $f(x)=x^2-x-a$. Последнее уравнение имеет единственный корень на отрезке $\left[0;2\right]$ тогда и только тогда, когда выполнен один из трёх случаев: либо квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет единственный корень и этот корень принадлежит интервалу $\left(0;2\right)$, либо $f(x)$ имеет единственный корень на отрезке $\left[0;2\right]$, равный 0 или 2, либо квадратный трёхчлен $f(x)$ принимает при $x=0$ и $x=2$ ненулевые значения разных знаков.

Рассмотрим первый случай. Квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет единственный корень при равенстве нулю его дискриминанта, то есть при $1+4a=0$, а значит, при $a=-0,25$.

При таком значении a уравнение $x^2-x-a=0$ имеет единственный корень $x=0,5$, он принадлежит отрезку $\left[0;2\right]$.

Рассмотрим второй случай. Имеем $f(0)=-a$ и $f(2)=2-a$. Значит, $f(0)=0$ при $a=0$. При таком значении a уравнение $x^2-x-a=0$ имеет два решения $x=0$ и $x=1$ на отрезке $\left[0;2\right]$. Аналогично $f(2)=0$ при $a=2$. При таком значении a уравнение $x^2-x-a=0$ имеет единственное решение $x=2$ на отрезке $\left[0;2\right]$.

Рассмотрим третий случай. Значения $f(0)=-a$ и $f(2)=2-a$ имеют разные знаки тогда и только тогда, когда $-a(2-a)<0$, или, что то же самое, при $0<a<2$.

Следовательно, уравнение $\left(x^2+x+a\right)^2=2x^4+2(x+a)^2$ имеет единственное решение на отрезке $\left[0;2\right]$ тогда и только тогда, когда $a=-0,25$ или $0<a\le 2$.

Ответ: $-0,25$; $\left(0;2\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

#14 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(2x+a+1-\operatorname{tg}x)^2=(2x+a-1+\operatorname{tg}x)^2$$

имеет единственное решение на отрезке $[0;\ \pi]$.

Решение.

Преобразуем уравнение: $(2x+a+1-\operatorname{tg}x)^2-(2x+a-1+\operatorname{tg}x)^2=0$;

$(2-2\operatorname{tg}x)(4x+2a)=0$, откуда $\operatorname{tg}x=1$ или $x=-\frac{a}{2}$ при условии, что $-\frac{a}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. Уравнение $\operatorname{tg}x=1$ имеет на отрезке $[0;\ \pi]$ единственный корень $\frac{\pi}{4}$. Число $\frac{\pi}{2}+\pi k$ принадлежит отрезку $[0;\ \pi]$ при $k=0$.

Следовательно, данное уравнение имеет единственное решение на отрезке $[0;\ \pi]$, только если число $-\frac{a}{2}$ или находится вне отрезка $[0;\ \pi]$, или совпадает с $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, или совпадает с $\frac{\pi}{4}$, то есть $-\frac{a}{2}<0;-\frac{a}{2}>\pi;-\frac{a}{2}=\frac{\pi}{2}$ или $-\frac{a}{2}=\frac{\pi}{4}$; откуда $a<-2\pi;a=-\pi;a=-\frac{\pi}{2}$ или $a>0$.

Ответ: $a<-2\pi;a=-\pi;\ a=-\frac{\pi}{2};a>0$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

#16 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(x + \ln(x + a))^2 = (x - \ln(x + a))^2$$

имеет единственное решение на отрезке [0; 1].

Источники:
СтатГрад 2018

$$(x + \ln(x+a))^2 - (x - \ln(x+a))^2 = 0$$

$$(x + \ln(x+a) - x + \ln(x+a)) \cdot (x + \ln(x+a) + x - \ln(x+a)) = 0$$

$$2 \cdot \ln(x+a) \cdot 2x = 0$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \ln(x+a) = 0 \\ x = 0 \end{array}\right. \\ x + a > 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x + a = 1 \\ x = 0 \end{array}\right. \\ x + a > 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 - a \end{array}\right. \\ x + a > 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$x_1 = 0$ при a, удовл. $x + a > 0$, $0 + a > 0$, $a > 0$

$\Rightarrow$ при $a > 0$ $x_1 = 0$ будет являться корнем уравнения

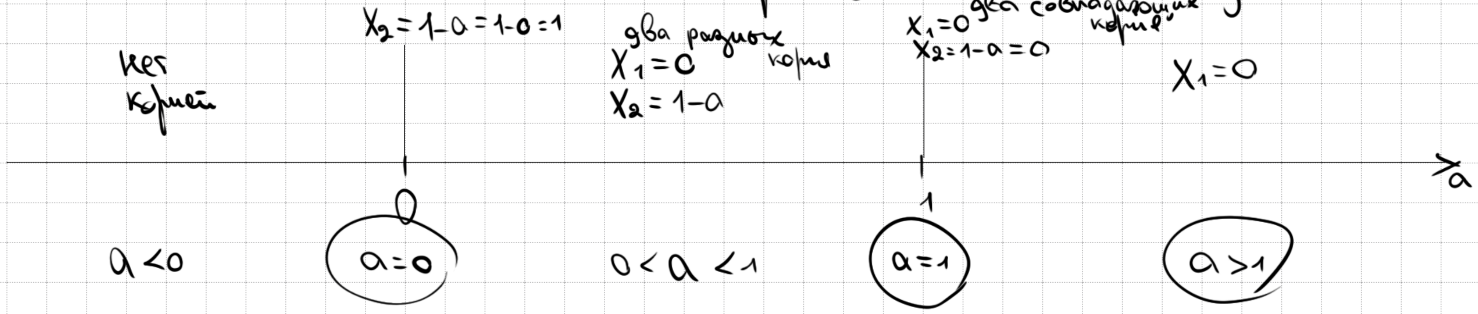
$x_2 = 1 - a$ при a, удовл. $\begin{cases} x + a > 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 1 - a + a > 0 \\ 0 \leq 1 - a \leq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a - \text{любое} \\ -1 \leq -a \leq 0 \end{cases}$ $1 \geq a \geq 0$

$\Rightarrow$ при $a \in [0; 1]$ $x_2 = 1 - a$ будет являться корнем уравнения

x_1 совпадает с x_2, если $0 = 1 - a$

$a = 1$

$\Rightarrow$ при $a = 1$ x_1 и x_2 совпадают



Ответ: $\{0\} \cup [1; +\infty)$.

#17 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(8x-5)\cdot\ln(x+a)=(8x-5)\cdot\ln(3x-a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$.

Источники:
FIPI
osfipi
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Основная волна 2017

$$(8x-5)\cdot\ln(x+a)-(8x-5)\cdot\ln(3x-a)=0$$

$$(8x-5)\cdot(\ln(x+a)-\ln(3x-a))=0$$

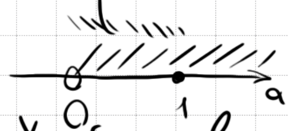
$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}8x-5=0\\ \ln(x+a)-\ln(3x-a)=0\end{array}\right.\\ x+a>0\\ 3x-a>0\\ 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{5}{8}\\ x+a=3x-a\end{array}\right.\\ x+a>0\\ 3x-a>0\\ 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_1=\frac{5}{8}\\ x_2=a\end{array}\right.\\ x+a>0\\ 3x-a>0\\ 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

$x_1=\frac{5}{8}$ при a, удовл. $\begin{cases}x+a>0\\ 3x-a>0\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{5}{8}+a>0\\ \frac{15}{8}-a>0\end{cases}$ $\begin{cases}a>-\frac{5}{8}\\ a<\frac{15}{8}\end{cases}$

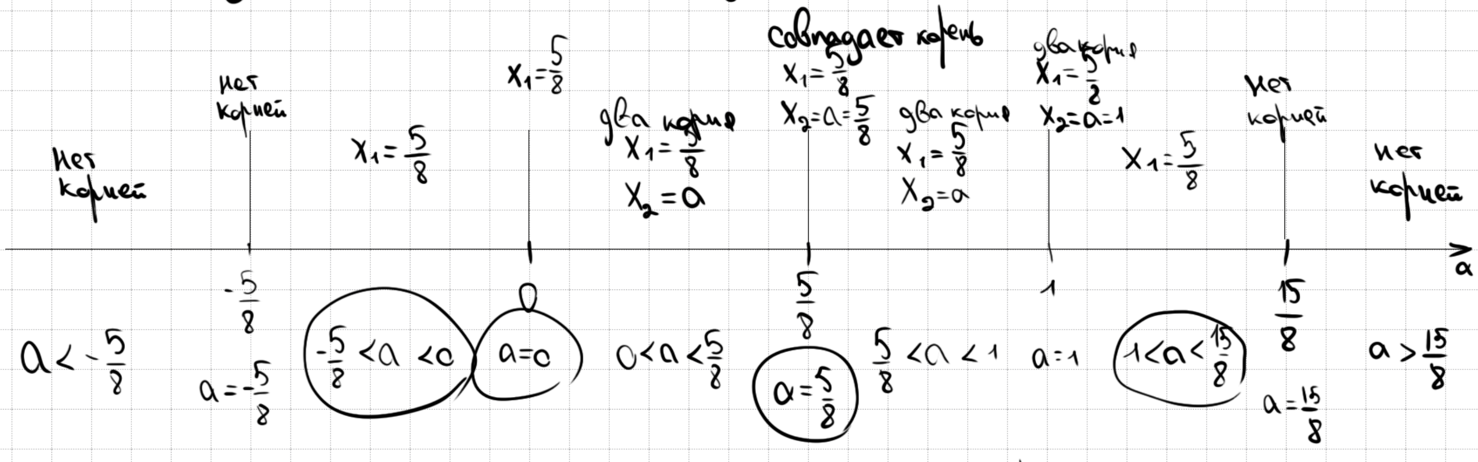
$\Rightarrow$ при $a\in\left(-\frac{5}{8};\frac{15}{8}\right)$ x_1 будет являться корнем уравнения

$x_2=a$ при a, удовл. $\begin{cases}x+a>0\\ 3x-a>0\\ 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$ $\begin{cases}a+a>0\\ 3a-a>0\\ 0\leqslant a\leqslant 1\end{cases}$ $\begin{cases}\cancel{2}a>0 \quad |:2\\ 0\leqslant a\leqslant 1\end{cases}$



$\Rightarrow$ при $a\in(0;1]$ x_2 будет являться корнем уравнения

x_1 совпадает с x_2, если $\frac{5}{8}=a$



Ответ: $\left(-\frac{5}{8};0\right]\cup\left\{\frac{5}{8}\right\}\cup\left(1;\frac{15}{8}\right)$.

#18 (ДЗ)

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\ln(3a-x)\ln(2x+2a-5)=\ln(3a-x)\ln(x-a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;2]$.

Источники:
Основная волна 2017

$\ln(3a-x)\cdot\ln(2x+2a-5)-\ln(3a-x)\cdot\ln(x-a)=0$

$\ln(3a-x)\cdot\left(\ln(2x+2a-5)-\ln(x-a)\right)=0$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\ln(3a-x)=0\\ \ln(2x+2a-5)-\ln(x-a)=0\end{array}\right.\\ 3a-x>0\\ 2x+2a-5>0\\ x-a>0\\ 0\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}1=3a-x\\ 2x+2a-5=x-a\end{array}\right.\\ 3a-x>0\\ 2x+2a-5>0\\ x-a>0\\ 0\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$$

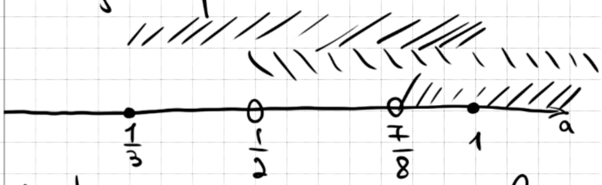
$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_1=3a-1\\ x_2=-3a+5\end{array}\right.\\ 3a-x>0\\ 2x+2a-5>0\\ x-a>0\\ 0\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$$

$X_1=3a-1$ при a, удовл. $\begin{cases}3a-x>0\\ 2x+2a-5>0\\ x-a>0\\ 0\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$

$$\begin{cases}\cancel{3a}-\cancel{3a}+1>0\\ 2\cdot(3a-1)+2a-5>0\\ 3a-1-a>0\\ 0\leqslant 3a-1\leqslant 2 \quad |+1\end{cases}$$

$$\begin{cases}a\text{ – любое}\\ 8a>7 & |\cdot\frac{1}{8}\\ 2a>1 & |\cdot\frac{1}{2}\\ 1\leqslant 3a\leqslant 3 & |\cdot\frac{1}{3}\end{cases} \qquad \begin{cases}a>\frac{7}{8}\\ a>\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\leqslant a\leqslant 1\end{cases}$$

Найдём пересечение:



$\Rightarrow$ при $a\in\left(\frac{7}{8};1\right]$ X_1 будет являться корнем уравнения

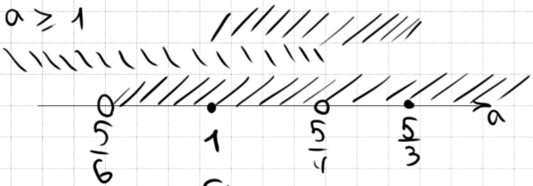
$X_2=-3a+5$ при a, удовл. $\begin{cases}3a-x>0\\ 2x+2a-5>0\\ x-a>0\\ 0\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$

$$\begin{cases}3a+3a-5>0\\ 2\cdot(-3a+5)+2a-5>0\\ -3a+5-a>0\\ 0\leqslant -3a+5\leqslant 2 \quad |-5\end{cases}$$

$$\begin{cases}6a>5\\ -4a>-5 & |\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\\ -4a>-5\\ -5\leqslant -3a\leqslant -3 & |\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}a>\frac{5}{6}\\ a<\frac{5}{4}\\ \frac{5}{3}\geqslant a\geqslant 1\end{cases}$$

Найдём пересечение:



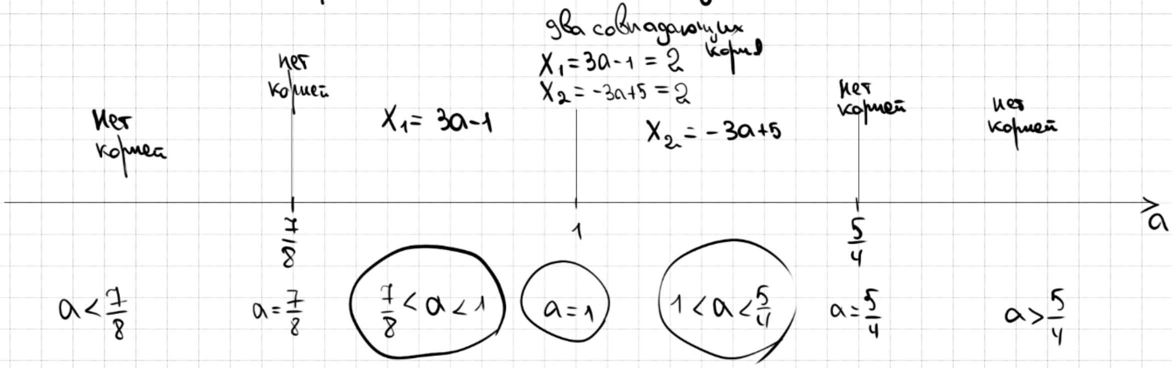
$\Rightarrow$ при $a\in\left[1;\frac{5}{4}\right)$ X_2 будет являться корнем уравнения

X_1 совпадает с X_2, если $3a-1=-3a+5$

$6a=6$

$a=1$

$\Rightarrow$ при $a=1$ X_1 и X_2 совпадают



Ответ: $\left(\frac{7}{8};\frac{5}{4}\right)$

#19 (ДЗ)

Источники:
СтатГрад 11.03.2020

$\boxed{18}$ Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\left(x^2-3+\sqrt{2x+a}\right)^2=(x^2-3)^2+2x+a$$

имеет единственное решение на отрезке $[0;2]$.

$$\begin{cases} \cancel{(x^2-3)^2}+2\cdot(x^2-3)\sqrt{2x+a}+\cancel{2x+a}=\cancel{(x^2-3)^2}+\cancel{2x+a} \\ 2x+a\geq 0 \\ 0\leq x\leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\cdot(x^2-3)\cdot\sqrt{2x+a}=0 \\ 2x+a\geq 0 \\ 0\leq x\leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2-3=0 \\ 2x+a=0 \end{array}\right. \\ 2x+a\geq 0 \\ 0\leq x\leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=\sqrt{3} \\ x_2=-\sqrt{3} \\ x_3=-\frac{a}{2} \end{array}\right. \\ 2x+a\geq 0 \\ 0\leq x\leq 2 \end{cases}$$

Заметим, что x_2 не принадлежит отрезку $[0;2]$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=\sqrt{3} \\ x_3=-\frac{a}{2} \end{array}\right. \\ 2x+a\geq 0 \\ 0\leq x\leq 2 \end{cases}$$

$x_1=\sqrt{3}$ при a, удовлетворяющих первому

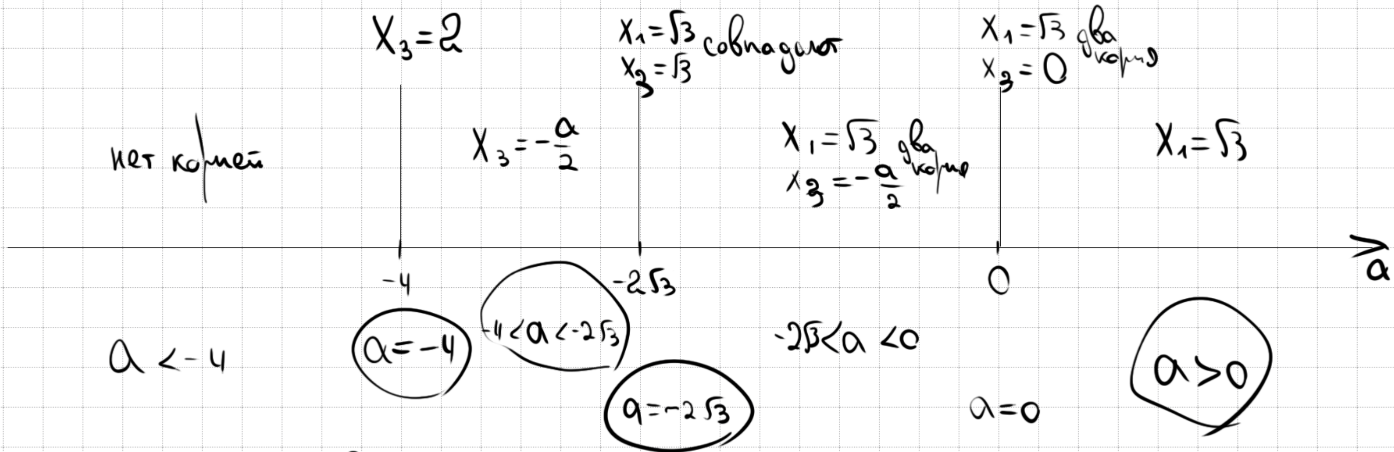
$2x+a\geq 0$

$2\cdot\sqrt{3}+a\geq 0$

$a\geq -2\sqrt{3}$

$x_3=-\frac{a}{2}$ при a, удовлетвор. $\begin{cases} 2x+a\geq 0 \\ 0\leq x\leq 2 \end{cases}$

$\begin{cases} -a+a\geq 0 \\ 0\leq -\frac{a}{2}\leq 2 \quad |\cdot(-2) \end{cases}$ $\begin{cases} a - \text{любое} \\ 0\geq a\geq -4 \end{cases}$ $\Rightarrow -4\leq a\leq 0$



Ответ: $[-4;-2\sqrt{3}]\cup(0;+\infty)$.

#22 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (x-1)\cdot\sqrt{2x-a} = x$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

Источники:
Основная волна 2017
Основная волна (Резерв) 2019

$x^2 - x + (x-1)\cdot\sqrt{2x-a} = 0$

$x\cdot(x-1) + (x-1)\cdot\sqrt{2x-a} = 0$

$(x-1)\cdot(x + \sqrt{2x-a}) = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x_1 - 1 = 0 \\ x + \sqrt{2x-a} = 0 \quad (1) \end{array}\right. \\ 2x - a \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array}\right.$$

(1) $x + \sqrt{2x-a} = 0$

$\sqrt{2x-a} = -x$

$$\left\{\begin{array}{l} -x \geq 0 \quad |\cdot(-1) \\ 2x - a = (-x)^2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x \leq 0 \\ 2x - a = x^2 \end{array}\right.$$

Это уравнение имеет корень на отрезке $[0;1]$ только если $x_2 = 0$

Найдём a, при котором $x_2 = 0$

$0 + \sqrt{2\cdot 0 - a} = 0$

$-a = 0$

$a = 0$

$\Rightarrow$ при $a = 0$ $x_2 = 0$ является корнем уравнения

Вернёмся к системе:

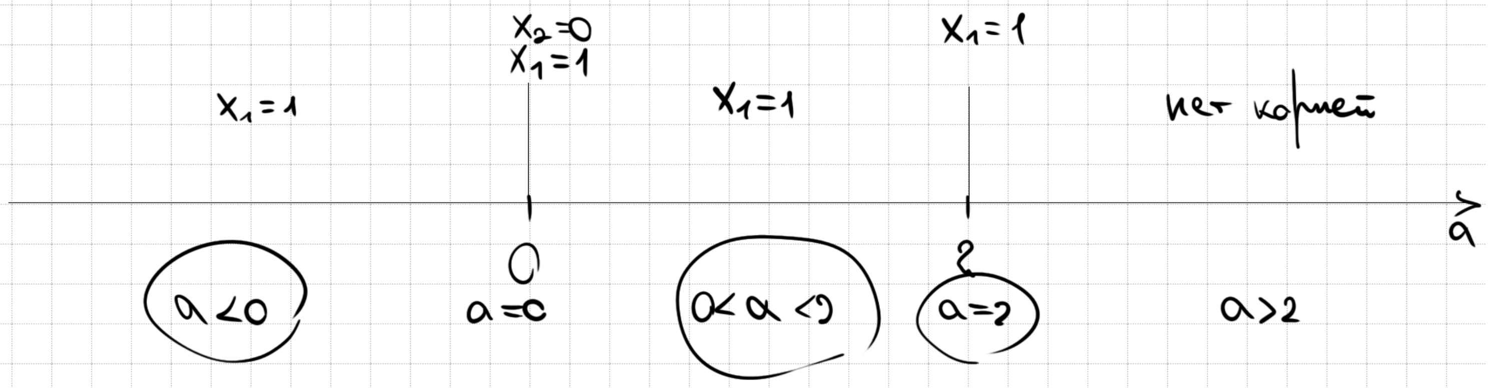
$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ \left\{\begin{array}{l} x_2 = 0 \\ a = 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \\ 2x - a \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array}\right.$$

$x_1 = 1$ при a, удовл. $2x - a \geq 0$

$2\cdot 1 - a \geq 0$

$a \leq 2$

$\Rightarrow$ при $a \leq 2$ $x_1 = 1$ является корнем уравнения на отрезке



Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; 2]$.

#23 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left(x^2+\sqrt{2x-a}\right)^2=\left(2x-1-\sqrt{2x-a}\right)^2$$

имеет единственный корень на отрезке $[-1;1]$.

Источники:
СтатГрад 29.01.2020
РАЗНОСТЬ КВАДРАТОВ
$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$$\left(x^2+\sqrt{2x-a}\right)^2-\left(2x-1-\sqrt{2x-a}\right)^2=0$$

$$\left(x^2+\sqrt{2x-a}-2x+1+\sqrt{2x-a}\right)\cdot\left(x^2+\cancel{\sqrt{2x-a}}+2x-1-\cancel{\sqrt{2x-a}}\right)=0$$

$$\left((x-1)^2+2\sqrt{2x-a}\right)\cdot\left(x^2+2x-1\right)=0$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2+2x-1=0 \quad (1)\\ (x-1)^2+2\sqrt{2x-a}=0 \quad (2)\end{array}\right.\\ 2x-a\geq 0\\ -1\leq x\leq 1\end{cases}$$

(1) $x^2+2x-1=0$

$D=4+4=8=2\sqrt{2}^2$

$x=\dfrac{-2\pm 2\sqrt{2}}{2}$

$x_1=-1+\sqrt{2}$

$x_2=-1-\sqrt{2}$

Заметим, что уравнение (2) имеет единств решение, только если каждое из слаг. $=0$.

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_1=-1+\sqrt{2}\\ x_2=-1-\sqrt{2}\\ \begin{cases}(x-1)^2=0\\ 2\sqrt{2x-a}=0\end{cases}\end{array}\right.\\ 2x-a\geq 0\\ -1\leq x\leq 1\end{cases}$$

Заметим, что $x_2\notin[-1;1]$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_1=-1+\sqrt{2}\\ \begin{cases}x_3=1\\ a=2\end{cases}\end{array}\right.\\ 2x-a\geq 0\\ -1\leq x\leq 1\end{cases}$$

$x_1=-1+\sqrt{2}$ при a удовл. $2x-a\geq 0$

$2\cdot(-1+\sqrt{2})-a\geq 0$

$-2+2\sqrt{2}-a\geq 0$

$a\leq 2\sqrt{2}-2$

$\Rightarrow$ при $a\leq 2\sqrt{2}-2$ $x_1=-1+\sqrt{2}$ является корнем уравнения на отрезке

$x_3=1$ при $a=2$

$x_1=-1+\sqrt{2}$ | $x_1=-1+\sqrt{2}$ | нет корней | $x_3=1$ | нет корней

$2\sqrt{2}-2$ | 2 | a

$a<2\sqrt{2}-2$ | $a=2\sqrt{2}-2$ | $2\sqrt{2}-2<a<2$ | $a=2$ | $a>2$

Ответ: $(-\infty;2\sqrt{2}-2]\cup\{2\}$.

#24 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x\sqrt{x-a} = \sqrt{4x^2-(4a+2)x+2a}$$

имеет ровно один корень на отрезке [0; 1].

Источники:
Основная волна (Резерв) 2017

По условию $x \in [0;1]$
$\Rightarrow$ обе части уравнения ≥ 0
$\Rightarrow$ можно возвести обе части уравнения в квадрат

$$(1)\ \begin{cases} x^2\cdot(x-a) = 4x^2-(4a+2)\cdot x+2a \\ x-a \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Условие $4x^2-(4a+2)\cdot x+2a \geq 0$ отпадает, т.к. оно выполняется в первой строчке системы

(1) $x^2\cdot(x-a) = 4x^2-4ax-2x+2a$

$x^2\cdot(x-a) = 4x\cdot(x-a)-2\cdot(x-a)$

$x^2\cdot(x-a) = (x-a)\cdot(4x-2)$

$x^2\cdot(x-a)-(x-a)\cdot(4x-2)=0$

$(x-a)\cdot(x^2-4x+2)=0$

$x-a=0$

$x_1=a$

$x^2-4x+2=0$

$D=16-8=(2\sqrt{2})^2$

$x=\frac{4\pm2\sqrt{2}}{2}$

$x_2=2+\sqrt{2}\qquad x_3=2-\sqrt{2}$

Вернёмся к системе:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=a \\ x_2=2+\sqrt{2} \\ x_3=2-\sqrt{2} \end{array}\right. \\ x-a\geq 0 \\ 0\leq x\leq 1 \end{cases}$$

Заметим, что $x_2=2+\sqrt{2}$ не принадлежит $[0;1]$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=a \\ x_3=2-\sqrt{2} \end{array}\right. \\ x-a\geq 0 \\ 0\leq x\leq 1 \end{cases}$$

$x_1=a$ при a, удовл. $\begin{cases} x-a\geq 0 \\ 0\leq x\leq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a-a\geq 0 \\ 0\leq a\leq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ при $0\leq a\leq 1$ $x_1=a$ является корнем уравнения на отрезке

$x_3=2-\sqrt{2}$ при a, удовл. $x-a\geq 0$

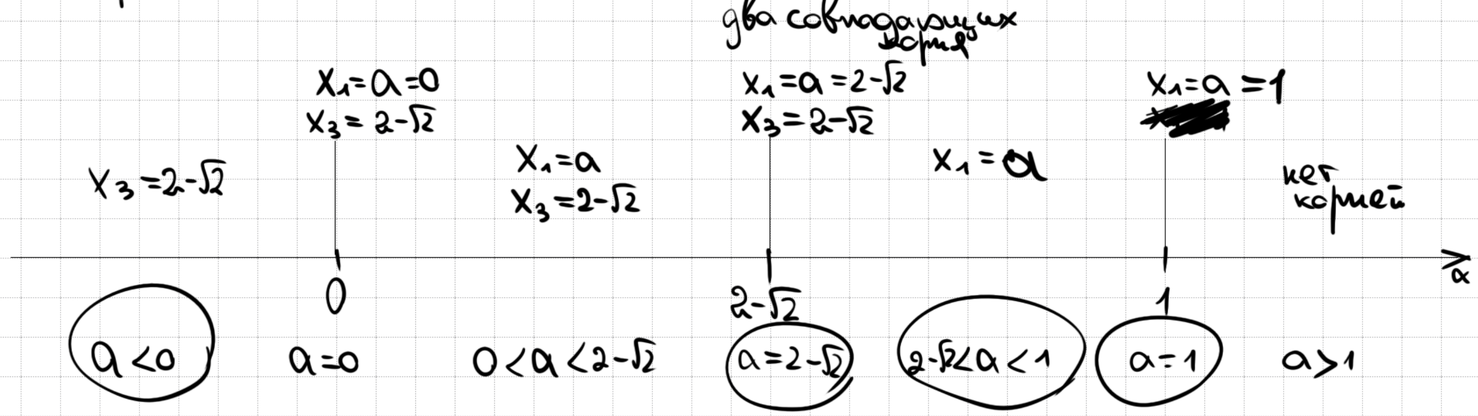
$2-\sqrt{2}-a\geq 0$

$a\leq 2-\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ при $a\leq 2-\sqrt{2}$ $x_3=2-\sqrt{2}$ является корнем уравнения на отрезке

x_1 совпадает с x_3, если $a=2-\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ при $a=2-\sqrt{2}$ $x_1=x_3$



Ответ: $(-\infty;0)\cup[2-\sqrt{2};1]$.

#25 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{5-7x}\cdot\ln(9x^2-a^2)=\sqrt{5-7x}\cdot\ln(3x+a)$$

имеет ровно один корень.

Источники:
FIPI
osfipi
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Основная волна 2017

$\sqrt{5-7x}\cdot\ln(9x^2-a^2)-\sqrt{5-7x}\cdot\ln(3x+a)=0$

$\sqrt{5-7x}\cdot\left(\ln(9x^2-a^2)-\ln(3x+a)\right)=0$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sqrt{5-7x}=0\\ \ln(9x^2-a^2)=\ln(3x+a)\end{array}\right.\\ 5-7x\geqslant 0\\ 9x^2-a^2>0\\ 3x+a>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}5-7x=0\\ (3x-a)(3x+a)-(3x+a)=0\end{array}\right.\\ x\leqslant\frac{5}{7}\\ 9x^2-a^2>0\\ 3x+a>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_1=\frac{5}{7}\\ (3x+a)\cdot(3x-a-1)=0\end{array}\right.\\ x\leqslant\frac{5}{7}\\ 9x^2-a^2>0\\ 3x+a>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_1=\frac{5}{7}\\ x_2=-\frac{a}{3}\\ x_3=\frac{a+1}{3}\end{array}\right.\\ x\leqslant\frac{5}{7}\\ 9x^2-a^2>0\\ 3x+a>0\end{cases}$$

$x_1=\frac{5}{7}$ является корнем ур-я, при a, удовл. $\begin{cases}9x^2-a^2>0\\ 3x+a>0\end{cases}$

$\begin{cases}9\cdot\frac{25}{49}-a^2>0\\ \frac{15}{7}+a>0\end{cases}$ $\quad\begin{cases}\left(\frac{15}{7}-a\right)\left(\frac{15}{7}+a\right)>0\\ a>-\frac{15}{7}\end{cases}$

$\begin{cases}-\frac{15}{7}<a<\frac{15}{7}\\ a>-\frac{15}{7}\end{cases}$ $\Rightarrow$ при $a\in\left(-\frac{15}{7};\frac{15}{7}\right)$ x_1 явл. корнем ур-я.

$x_2=-\frac{a}{3}$ является корнем ур-я, при a, удовл.

$$\begin{cases}-\frac{a}{3}\leqslant\frac{5}{7}\quad|\cdot(-3)\\ 9\cdot\left(-\frac{a}{3}\right)^2-a^2>0\\ 3\cdot\left(-\frac{a}{3}\right)+a>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a\geqslant-\frac{15}{7}\\ a^2-a^2>0\\ -a+a>0\end{cases}\Rightarrow\text{нет реш}$$

x_2 не является корнем ур-я ни при каких a

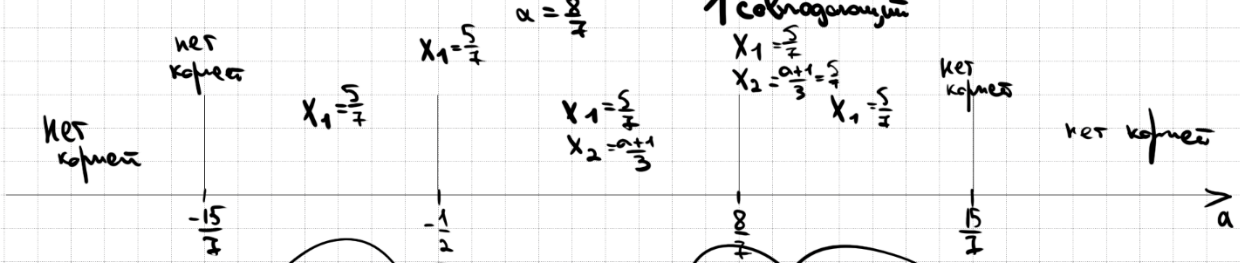
$x_3=\frac{a+1}{3}$ явл. корнем ур-я при, удовл. $\begin{cases}\frac{a+1}{3}\leqslant\frac{5}{7}\quad|\cdot 3\\ 9\left(\frac{a+1}{3}\right)^2-a^2>0\\ 3\cdot\left(\frac{a+1}{3}\right)+a>0\end{cases}$

$$\begin{cases}a+1\leqslant\frac{15}{7}\\ (a+1)^2-a^2>0\\ a+1+a>0\end{cases}\quad\begin{cases}a\leqslant\frac{8}{7}\\ \cancel{a^2}+2a+1-\cancel{a^2}>0\\ 2a>-1\end{cases}\quad\begin{cases}a\leqslant\frac{8}{7}\\ a>-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$\Rightarrow$ при $a\in\left(-\frac{1}{2};\frac{8}{7}\right]$ x_3 является корнем ур-я

Найдём, при каких a $x_1=\frac{5}{7}$ совпадает с $x_3=\frac{a+1}{3}$

$$\frac{5}{7}=\frac{a+1}{3}$$
$$7a+7=15$$
$$7a=8$$
$$a=\frac{8}{7}$$



$a<-\frac{15}{7}$ $\quad a=-\frac{15}{7}$ $\quad -\frac{15}{7}<a<-\frac{1}{2}$ $\quad a=-\frac{1}{2}$ $\quad -\frac{1}{2}<a<\frac{8}{7}$ $\quad a=\frac{8}{7}$ $\quad \frac{8}{7}<a<\frac{15}{7}$ $\quad a=\frac{15}{7}$ $\quad a>\frac{15}{7}$

Ответ: $\left(-\frac{15}{7};-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{8}{7};\frac{15}{7}\right)$

#26 (ДЗ)

6. Задание 18 № 517457

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x-2}\ln(x-a)=\sqrt{3x-2}\ln(2x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке [0; 1].

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{3x-2}(\ln(x-a)-\ln(2x+a))=0$ и рассмотрим два случая.

Первый случай: $\sqrt{3x-2}=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$,Этот корень лежит на отрезке [0;1]. Остается проверить условия:

$$\begin{cases} x-a>0, \\ 2x+a>0. \end{cases}$$

То есть если

$$\begin{cases} \frac{2}{3}-a>0, \\ \frac{4}{3}+a>0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{4}{3}<a<\frac{2}{3}.$$

Второй случай:

$$\begin{cases} \ln(x-a)-\ln(2x+a)=0, \\ 3x-2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-a=2x+a, \\ x-a>0, \\ 3x-2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2a, \\ -3a>0, \\ -6a-2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2a, \\ a\le -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Корень $-2a$ лежит на отрезке [0; 1] при $-\frac{1}{2}\le a\le 0$. Для второго случая получаем $-\frac{1}{2}\le a\le -\frac{1}{3}$.

Корни уравнения $x=\frac{2}{3}$ и $x=-2a$ совпадают при $a=-\frac{1}{3}$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно один корень на отрезке [0; 1] при $-\frac{4}{3}<a<-\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{3}\le a<\frac{2}{3}$.

Ответ: $-\frac{4}{3}<a<-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}\le a<\frac{2}{3}$.

#28 (ДЗ)

7. Задание 18 № 517543

Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\ln(5x-2)\sqrt{x^2-2x+2a-a^2}=0$$

имеет ровно один корень на отрезке [0; 1].

Решение.

Имеем уравнение вида $xy=0$, откуда на ОДЗ либо $x=0$, либо $y=0$. Рассмотрим эти случаи.

Первый случай: $\ln(5x-2)=0$, при при выполнении условия $x^2-2x+2a-a^2\geq 0$, то есть если

$$\begin{cases} x=\dfrac{3}{5}, \\ \dfrac{9}{25}-\dfrac{6}{5}+2a-a^2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{5}, \\ a^2-2a+\dfrac{21}{25}\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{5}, \\ a\leq 1+\sqrt{1-\dfrac{21}{25}} \\ a\geq 1-\sqrt{1-\dfrac{21}{25}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{5}, \\ \dfrac{3}{5}\leq a\leq\dfrac{7}{5}. \end{cases}$$

Число $\dfrac{3}{5}$ лежит на отрезке [0; 1], для первого случая получаем: $\dfrac{3}{5}\leq a\leq\dfrac{7}{5}$.

Второй случай:

$$\begin{cases} x^2-2x+2a-a^2=0, \\ 5x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)(x+a)-2(x-a)=0, \\ 5x-2>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)(x+a-2)=0, \\ 5x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{2}{5}, \\ \left[\begin{array}{l} x=a, \\ x=2-a \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=a, \\ a>\dfrac{2}{5}, \end{cases} \\ \begin{cases} x=2-a, \\ 2-a>\dfrac{2}{5} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=a, \\ a>\dfrac{2}{5} \end{cases} (*) \\ \begin{cases} x=2-a, \\ a<\dfrac{8}{5}. \end{cases} (**) \end{array}\right.$$

Корень a лежит на отрезке [0; 1] при $0\leq a\leq 1$, учитывая $(*)$, получаем $\dfrac{2}{5}<a\leq 1$.

Корень $2-a$ лежит на отрезке [0; 1] при $1\leq a\leq 2$, учитывая $(**)$, получаем $1\leq a<\dfrac{8}{5}$.

Корни уравнения $x=a$ и $x=2-a$ совпадают при $a=1$.

Корни уравнения $x=a$ и $x=\dfrac{3}{5}$ совпадают при $a=\dfrac{3}{5}$.

Корни уравнения $x=2-a$ и $x=\dfrac{3}{5}$ совпадают при $a=\dfrac{7}{5}$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно один корень на отрезке [0; 1] при $\dfrac{2}{5}<a\leq\dfrac{3}{5}$, и $\dfrac{7}{5}\leq a<\dfrac{8}{5}$.

Ответ: $\dfrac{2}{5}<a\leq\dfrac{3}{5}$, и $\dfrac{7}{5}\leq a<\dfrac{8}{5}$.

#29 (ДЗ)

13. Задание 18 № 517557

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{1-2x}\cdot\ln(25x^2-a^2)=\sqrt{1-2x}\ln(5x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;\,1]$.

Решение.

Имеем уравнение вида $xy=xz$, откуда на ОДЗ либо $x=0$, либо $y=z$. Рассмотрим эти случаи.

Первый случай: $1-2x=0$ при условиях:

$$\begin{cases}25x^2-a^2>0,\\5x+a>0.\end{cases}$$

Имеем:

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\25\cdot\dfrac{1}{4}-a^2>0,\\5\cdot\dfrac{1}{2}+a>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\-\dfrac{5}{2}<a<\dfrac{5}{2}.\end{cases}$$

Число $\dfrac{1}{2}$ лежит на отрезке $[0;\,1]$, для первого случая получаем: $-\dfrac{5}{2}<a<\dfrac{5}{2}$.

Второй случай: $\ln(25x^2-a^2)=\ln(5x+a)$ при условии $1-2x\geq 0$.

Имеем:

$$\begin{cases}25x^2-a^2=5x+a,\\5x+a>0,\\1-2x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(5x+a)(5x-a-1)=0,\\5x+a>0,\\1-2x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq\dfrac{1}{2},\\5x+a>0,\\\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{a}{5},\\x=\dfrac{1+a}{5}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-\dfrac{a}{5},\\-\dfrac{a}{5}\leq\dfrac{1}{2},\\5\cdot\left(-\dfrac{a}{5}\right)+a>0\end{cases}\\\begin{cases}x=\dfrac{1+a}{5},\\\dfrac{1+a}{5}\leq\dfrac{1}{2},\\5\cdot\dfrac{1+a}{5}+a>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-\dfrac{a}{5},\\a\geq-\dfrac{5}{2},\\0\cdot a>0\end{cases}\\\begin{cases}x=\dfrac{1+a}{5},\\a\leq\dfrac{3}{2},\\a>-\dfrac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1+a}{5},\\-\dfrac{1}{2}<a\leq\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

Число $x=\dfrac{1+a}{5}$ лежит на отрезке $[0;\,1]$, если $-1\leq a\leq 4$. Тогда для второго случая получаем: $-\dfrac{1}{2}<a\leq\dfrac{3}{2}$.

Корень $x=\dfrac{1+a}{5}$ равен $x=\dfrac{1}{2}$, если $a=\dfrac{3}{2}$.

Итак, исходное уравнение имеет ровно один корень на отрезке $[0;\,1]$ при $-\dfrac{5}{2}<a\leq-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{3}{2}\leq a<\dfrac{5}{2}$.

Ответ: $-\dfrac{5}{2}<a\leq-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{3}{2}\leq a<\dfrac{5}{2}$.

#30 (ДЗ)

Ответа пока что нет

#31 (ДЗ)

$(-\infty; 0) \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$

#32 (ДЗ)

Ответа пока что нет

#33 (ДЗ)

Ответа пока что нет

#34 (ДЗ)

$(-\infty; -2{,}5) \cup (-2{,}5; -0{,}4] \cup \{0\} \cup [0{,}4; 2{,}5) \cup (2{,}5; +\infty)$

#37 (ДЗ)

Задание 18 № 548407

При каких значениях а система

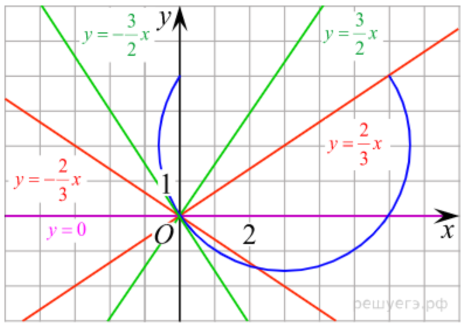
$$\begin{cases} \sqrt{16-y^2} = \sqrt{16-a^2x^2}, \\ x^2+y^2 = 6x+4y \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

Решение.

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} \sqrt{16-y^2} = \sqrt{16-a^2x^2}, \\ x^2+y^2 = 6x+4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16-y^2 \geq 0, \\ 16-y^2 = 16-a^2x^2, \\ x^2-6x+y^2-4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq y \leq 4, \\ y = \pm ax, \\ (x-3)^2+(y-2)^2 = 13. \end{cases}$$



Изобразим линии, соответствующие предложениям системы, в плоскости xOy. Каждое из двух уравнений $y = \pm ax$ задаёт пучок прямых, проходящих через начало координат, симметричных друг другу относительно оси ординат и совпадающих при $a = 0$. Двойное неравенство $-4 \leq y \leq 4$ задает горизонтальную полосу, ограниченную прямыми $y = -4$ и $y = 4$, включая границы. Уравнение $(x-3)^2+(y-2)^2 = 13$ задает окружность с центром в точке $(3; 2)$ и радиусом $\sqrt{13}$. Дуга окружности, лежащая в указанной полосе, выделена на рисунке синим. Определим, при каком значении параметра a прямые, задаваемые уравнениями $y = \pm ax$, имеют с этой дугой окружности ровно две общие точки.

Точка $(0; 0)$ является решением при любом значении параметра a. Вторая точка пересечения соответствует следующим трем случаям.

— Пересечению совпадающих при $a = 0$ прямых $y = \pm ax$ с дугой окружности в точке $(6; 0)$ — см. рис., выделено пурпурным.

— Пересечению с дугой окружности одной из прямых в том случае, когда другая прямая является касательной, проходящей через точку $(0; 0)$. Найдем уравнение такой касательной. Прямая, проходящая через начало координат, задается уравнением $y = kx$. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, то есть перпендикулярна прямой $y = \frac{2}{3}x$, содержащий этот радиус (см. рис.). Две прямые на плоскости, отличные от координатных осей, перпендикулярны тогда и только тогда, когда произведение их угловых коэффициентов равно -1. Тем самым $k \cdot \frac{2}{3} = -1$, откуда $k = -\frac{3}{2}$. Следовательно, искомое уравнение касательной есть $y = -\frac{3}{2}x$, что соответствует значениям $a = \pm\frac{3}{2}$. При этом вторая прямая $y = \frac{3}{2}x$ не пересекает дугу окружности в точке, отличной от начала координат, а значит, найденные значения параметра не являются искомыми.

— Пересечению с дугой окружности одной из прямых, если при этом вторая прямая не пересекает дугу в точке, отличной от точки $(0; 0)$. Этот случай реализуется при $a > -\frac{2}{3}$ или при $a < \frac{2}{3}$, за исключением ранее отброшенных точек $a = \pm\frac{3}{2}$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}\right) \cup \{0\} \cup \left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Источник: ЕГЭ по математике 10.07.2020. Основная волна. Краснодар, Задания 18 ЕГЭ–2020

Спрятать решение · В избранное (12) · Поделиться · ▶ Видеокурс · ▶ Курс Д. Д. Гущина · Сообщить об ошибке · Помощь

#38 (ДЗ)

Задание 18 № 548561

Найдите все положительные значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} \sqrt{4x-x^2}=\sqrt{4ay-a^2y^2}, \\ y=x^2 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение.

Заметим, что при $x<0$ и при $x>4$ левая часть первого уравнения системы не определена, а при $0\le x\le 4$ первое уравнение системы принимает вид: $4x-x^2=4ay-a^2y^2$, или $(ay-x)(ay+x-4)=0$, откуда $ay-x=0,\ ay+x-4=0.$

При $y=x^2$ и $a>0$ уравнение $ay-x=0$ принимает вид $ax^2-x=0$, откуда $x=0$ или $x=\frac{1}{a}$.

При $y=x^2$ и $a>0$ уравнение $ay+x-4=0$ принимает вид $ax^2+x-4=0$, откуда $x=\frac{-\sqrt{1+16a}-1}{2a}$ или $x=\frac{\sqrt{1+16a}-1}{2a}$.

Для корня $x=0$ условие $0\le x\le 4$ выполнено. Для корня $x=\frac{1}{a}$ условие $0\le x\le 4$ выполнено при $a\ge\frac{1}{4}$. При положительных a корень $x=\frac{-\sqrt{1+16a}-1}{2a}$ отрицательный. Для корня $x=\frac{\sqrt{1+16a}-1}{2a}$ условие $0\le x\le 4$ при положительных a принимает вид:

$$0\le\frac{\sqrt{1+16a}-1}{2a}\le 4\Leftrightarrow\begin{cases} a\ge 0, \\ a^2\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow a\ge 0.$$

Корни $\frac{1}{a}$ и $\frac{\sqrt{1+16a}-1}{2a}$ не равны нулю при положительных a и совпадают при

$$\frac{\sqrt{1+16a}-1}{2a}=\frac{1}{a}\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно три различных решения при $\frac{1}{4}\le a<\frac{1}{2};\ a>\frac{1}{2}$.

Ответ: $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Аналоги к заданию № 548568: 548561 Все

Источник: ЕГЭ по математике 10.07.2020. Основная волна. Вариант 409, Задания 18 ЕГЭ–2020

#39 (ДЗ)

$\left\{-\frac{21}{16};0;\frac{19}{16};\frac{25}{4}\right\}$

#40 (ДЗ)

18	$0<a\le 4$

18. **Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение**

$$x^4+4x^3+4ax-16x-16+8a-a^2=0$$

имеет не менее трёх корней.

#41 (ДЗ)

18

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{x+1}(x+5-a)=2$$

имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $(-1;\,2]$.

E60976

Источники:

FIPI

Досрочная волна 2013

$$\begin{cases}(x+1)^2=x+5-a\\ x+1>0\\ x+1\neq 1\\ -1<x\leq 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+2x+1=x+5-a\\ x>-1\\ x\neq 0\\ -1<x\leq 2\end{cases}$$

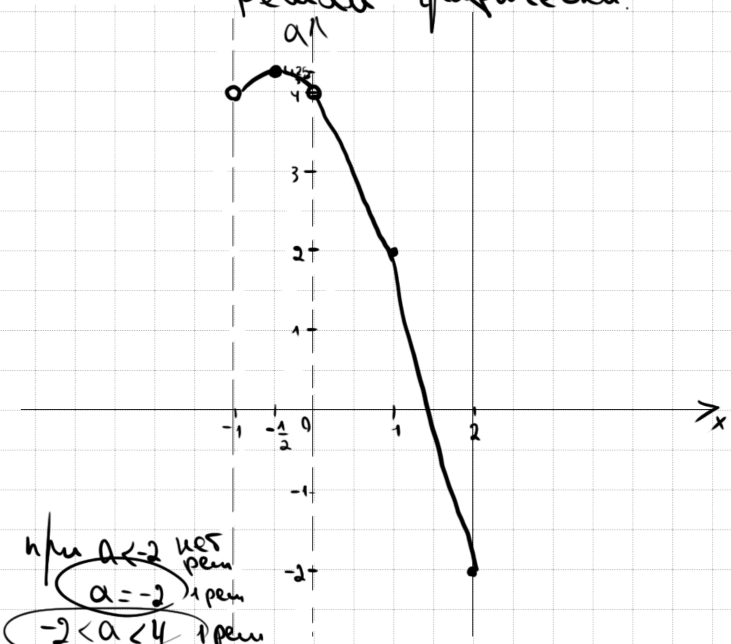
$$\begin{cases}a=-x^2-x+4\\ x>-1\\ x\neq 0\\ -1<x\leq 2\end{cases}$$

Пусть $f(x)=-x^2-x+4$ – график – парабола, ветви ↓

$x_0=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$

$y_0=4{,}25$

Решим графически:



при $a<-2$ нет реш

$a=-2$ 1 реш

$-2<a<4$ 1 реш

$a=4$ нет реш

$4<a<4{,}25$ 2 реш

$a=4{,}25$ 1 реш

$a>4{,}25$ нет реш

Ответ: $[-2;4)\cup(4;4{,}25]$

#42 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|2x^2+3x-2| = 8x-2x^2-a$$

либо не имеет решений, либо имеет единственное решение.

1D52D2

Источники:

FIPI
osfipi
Семёнов 2015

$a = -|2x^2+3x-2| + 8x - 2x^2$

Определим знаки выражения $2x^2+3x-2$

$+\quad -2 \quad - \quad \frac{1}{2} \quad + \quad x$

Пусть $f(x) = -|2x^2+3x-2| + 8x - 2x^2$

$x_0 = \frac{-5}{-8} = \frac{5}{8}$ $a_0 = -4\cdot\frac{25}{64} + \frac{25}{8} + 2 = \frac{57}{16}$

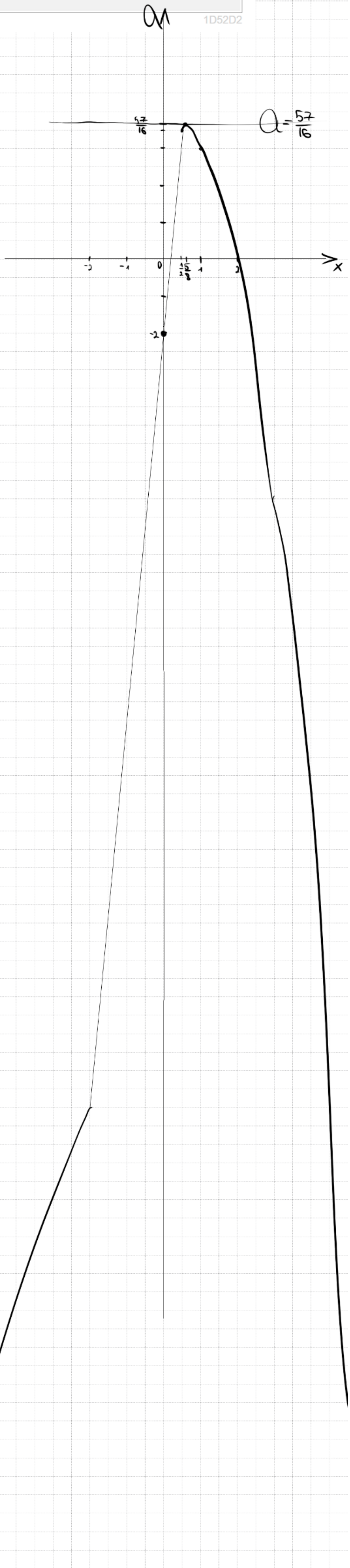
$$f(x) = \begin{cases} -4x^2+5x+2 & \text{при } \left[\begin{array}{l} x \le -2 \\ x \ge \frac{1}{2} \end{array}\right. \\ 11x-2 & \text{при } -2 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

при $a < \frac{57}{16}$ 2 реш

$a = \frac{57}{16}$ 1 реш

$a > \frac{57}{16}$ нет реш

Ответ: $\left[\frac{57}{16}; +\infty\right)$



#43 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{3}{x+1} = a\,|x-5|$$

на промежутке $[0\,;\,+\infty)$ имеет более двух корней.

71C0AB

Источники:
FIPI
osfipi
Основная волна 2012
Семёнов 2015

Построим $y = \frac{3}{x+1}$

Построим $y = a\cdot|x-5|$ так, чтобы было 2 реш.

Найдём a для прямой k:

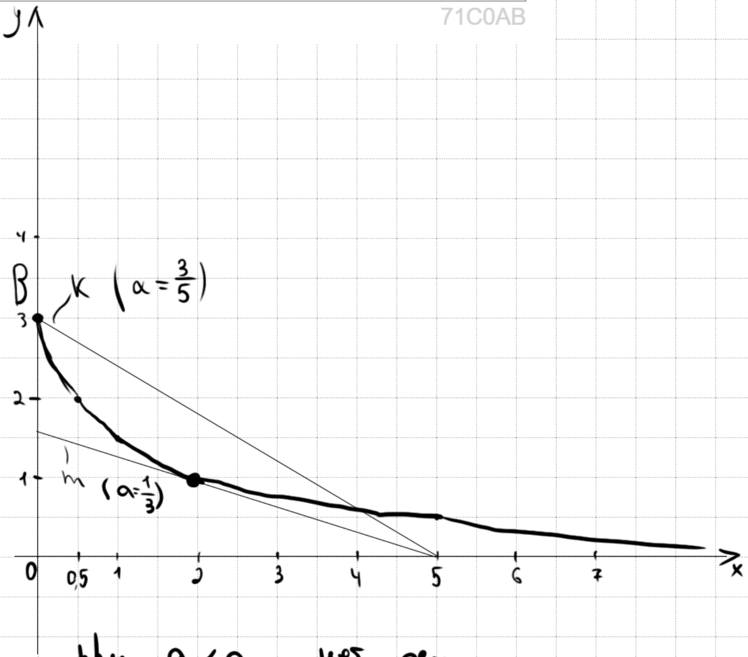
$y = a\cdot(-x+5)$ проходит через точку $B(0;3)$

где $a>0$

$3 = a\cdot(-0+5)$

$3 = 5\cdot a$

$a = \frac{3}{5}$



при $a\le 0$ нет реш

$0<a<\frac{1}{3}$ 1 реш

$a=\frac{1}{3}$ 2 реш

$\frac{1}{3}<a<\frac{3}{5}$ 3 реш

$a=\frac{3}{5}$ 3 реш

$a>\frac{3}{5}$ 2 реш

Найдём a для прямой m

$y = a\cdot(-x+5)$ является касательной для $y=\frac{3}{x+1}$

Условие касание:

$$\begin{cases} ① & (-ax+5a)' = (3\cdot(x+1)^{-1})' \\ ② & -ax+5a = \frac{3}{x+1} \end{cases}$$

① $-a = -3\cdot(x+1)^{-2} \quad |\cdot(-1)$

$a = \frac{3}{(x+1)^2}$

② Подставим:

$$-\frac{3\cdot x}{(x+1)^2} + \frac{5\cdot 3}{(x+1)^2} - \frac{3}{x+1} = 0$$

$$\frac{-3x+15-3x-3}{(x+1)^2} = 0$$

$-6x+12=0$

$x=2$

$a = \frac{3}{(2+1)^2} = \frac{1}{3}$

Ответ: $\left(\frac{1}{3};\frac{3}{5}\right]$

УСЛОВИЕ КАСАНИЯ ФУНКЦИИ И ПРЯМОЙ

$$\begin{cases} y' = f'(x_0) \\ y = f(x_0) \end{cases}$$

ПРОИЗВОДНЫЕ

1	$C' = 0$
2	$x' = 1$
3	$(Cx)' = C$
4	$(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$
5	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6	$(U\cdot V)' = U'V + UV'$
7	$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$
8	$\left(U(V)\right)' = \left(U(V)\right)'\cdot V'$
9	$(\sin x)' = \cos x$
10	$(\cos x)' = -\sin x$
11	$(\mathrm{tg}\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
12	$(\mathrm{ctg}\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13	$(e^x)' = e^x$
14	$(a^x)' = a^x\cdot\ln a$
15	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
16	$(\log_a b)' = \frac{1}{b\cdot\ln a}$

#44 (ДЗ)

18

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$ax-1=\left|\frac{6}{x}-3\right|$

на промежутке $(0;\ +\infty)$ имеет ровно один корень.

4AA5D9

Источники:

FIPI
osfipi
Основная волна 2012
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Семёнов 2015

Построим $y=\left|\frac{6}{x}-3\right|$

$\left|\frac{6}{x}-3\right|=0$
$\frac{6}{x}-3=0$
$\frac{6}{x}=3$
$x=2$

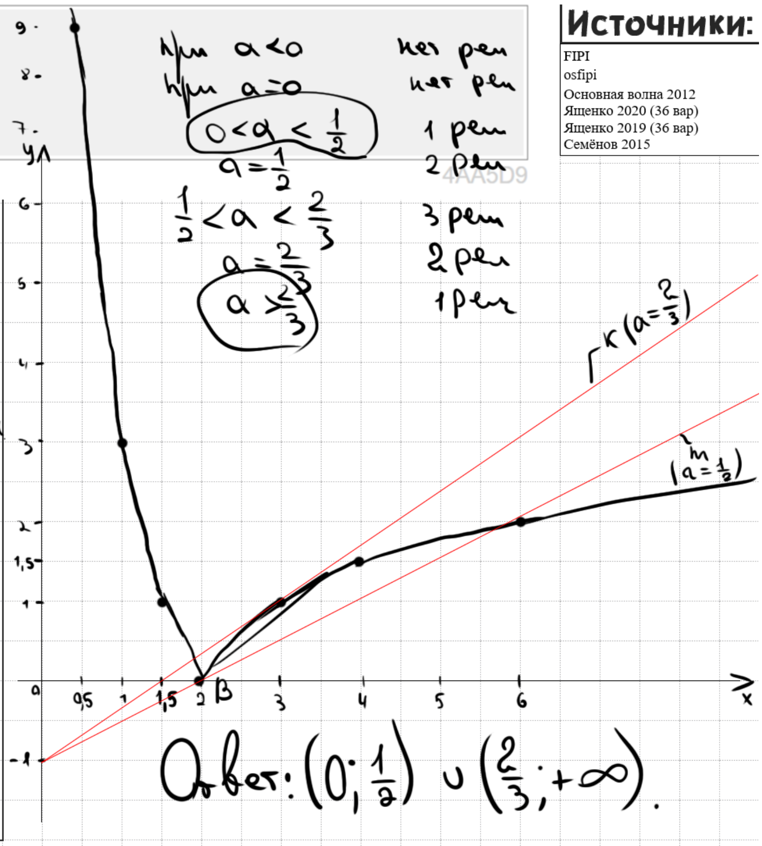
x	0,5	1	1,5	2	3	4	6
y	9	3	1	0	1	1,5	2

Построим $y=ax-1$ так, чтобы было 1 пересеч

Найдём значение параметра a для прямой m:

$y=a\cdot x-1$ проходит через точку $B(2;0)$

$0=a\cdot 2-1$
$1=2a$
$a=\frac{1}{2}$



при $a<0$ нет реш
при $a=0$ нет реш
$0<a<\frac{1}{2}$ 1 реш
$a=\frac{1}{2}$ 2 реш
$\frac{1}{2}<a<\frac{2}{3}$ 3 реш
$a=\frac{2}{3}$ 2 реш
$a>\frac{2}{3}$ 1 реш

Ответ: $\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$.

Найдём значение параметра a для прямой k:

$y=ax-1$ является касательной для $y=-\frac{6}{x}+3$

Условие касания:

$$\begin{cases} ① & (ax-1)'=\left(3-\frac{6}{x}\right)' \\ ② & ax-1=3-\frac{6}{x} \end{cases}$$

① $a=\left(-6\cdot x^{-1}\right)'$
$a=-6\cdot(-1)\cdot x^{-2}$
$a=\frac{6}{x^2}$

② Подставим:
$\frac{6}{x^2}\cdot x-1=3-\frac{6}{x}$
$\frac{6}{x}+\frac{6}{x}=3+1$
$\frac{12}{x}=4$
$x=3$
$a=\frac{6}{3^2}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

УСЛОВИЕ КАСАНИЯ ФУНКЦИИ И ПРЯМОЙ

$$\begin{cases} y'=f'(x_0) \\ y=f(x_0) \end{cases}$$

ПРОИЗВОДНЫЕ

1	$C'=0$
2	$x'=1$
3	$(Cx)'=C$
4	$(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$
5	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
6	$(U\cdot V)'=U'V+UV'$
7	$\left(\frac{U}{V}\right)'=\frac{U'V-UV'}{V^2}$
8	$(U(V))'=(U(V))'\cdot V'$
9	$(\sin x)'=\cos x$
10	$(\cos x)'=-\sin x$
11	$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$
12	$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$
13	$(e^x)'=e^x$
14	$(a^x)'=a^x\cdot\ln a$
15	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$
16	$(\log_a b)'=\frac{1}{b\cdot\ln a}$

#45 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых любое значение из промежутка $[-1{,}5; -0{,}5]$ является решением неравенства

$$(4|x| - a - 3)(x^2 - 2x - 2 - a) \geq 0$$

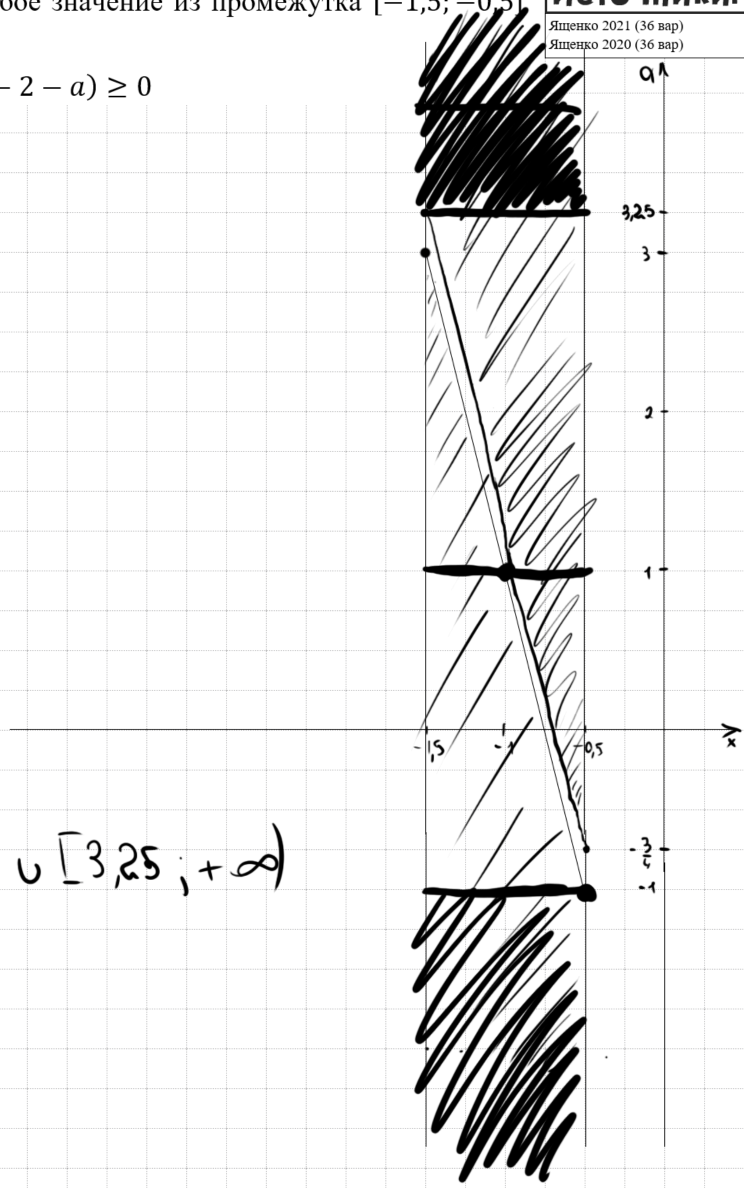
Источники:
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4|x| - a - 3 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 2 - a \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4|x| - a - 3 \leq 0 \\ x^2 - 2x - 2 - a \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \leq 4|x| - 3 \\ a \leq x^2 - 2x - 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a \geq 4|x| - 3 \\ a \geq x^2 - 2x - 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Заметим, что $x^2 - 2x - 2 = x^2 - 2x + 1 - 3 = (x-1)^2 - 3$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \leq 4|x| - 3 \\ a \leq (x-1)^2 - 3 \end{cases} \\ \begin{cases} a \geq 4|x| - 3 \\ a \geq (x-1)^2 - 3 \end{cases} \end{array}\right.$$



Ответ: $(-\infty; -1] \cup \{1\} \cup [3{,}25; +\infty)$

#46 (ДЗ)

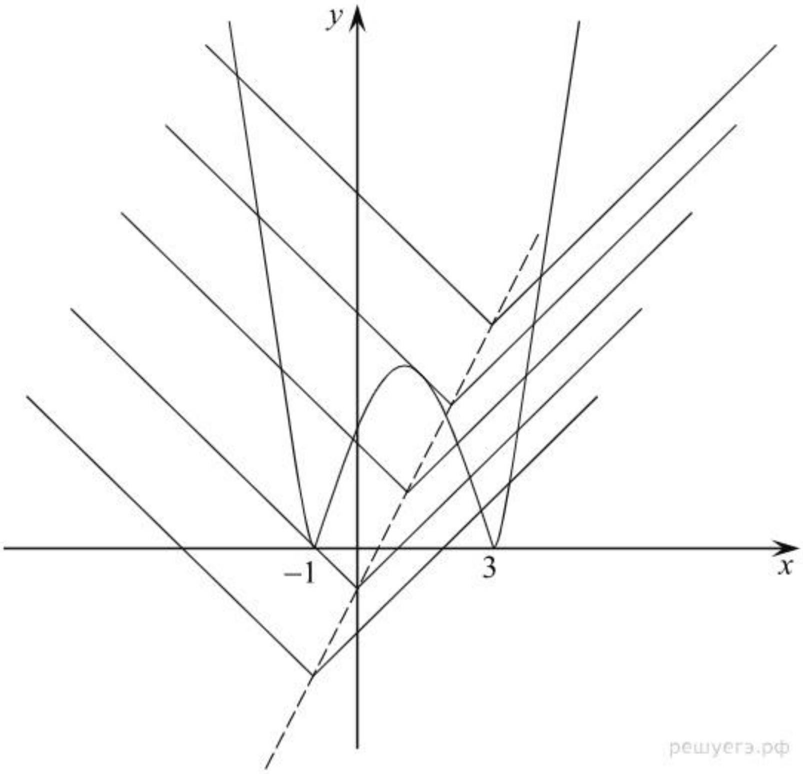
6 **Задание 18 № 485982**

При каких a уравнение $\left|x^2-2x-3\right|-2a=|x-a|-1$ имеет ровно три корня?

Решение.

Запишем уравнение в виде $\left|x^2-2x-3\right|=|x-a|+2a-1$.

Построим графики левой и правой частей уравнения $f(x)=\left|x^2-2x-3\right|$ и $g(x)=|x-a|+2a-1$. Первая из них парабола с отраженной отрицательной частью, а вторая график модуля с вершиной в точке $(a,2a-1)$ (см. рис.). Ясно, что вершина второго графика перемещается в зависимости от a по прямой $y=2x-1$. Из рисунка видно, что подходящих значений a ровно два — при одном из них график правой части проходит через точку $(-1,0)$ при другом — касается отраженного участка параболы.



Первое происходит при $a=0$, а второе — когда уравнение

$$3+2x-x^2=3a-1-x \Leftrightarrow x^2-3x+3a-4=0,$$

имеет единственный корень, то есть в случае, когда дискриминант равен нулю.

$$D=3^2-4(3a-4)=25-12a=0 \Leftrightarrow a=\frac{25}{12}.$$

Ответ: $a=0, a=\frac{25}{12}.$

Аналоги к заданию № 485982: 515767 Все

Раздел кодификатора ФИПИ/Решу ЕГЭ: Левая и правая части в качестве отдельных графиков

Спрятать решение · В избранное (52) · Поделиться · 1 комментарий · Сообщить об ошибке · Помощь

#47 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых среди корней уравнения

$$x^2 - 10x + 35 = a|x-6|$$

будет ровно два положительных.

Построим $y = x^2 - 10x + 35$
$x_0 = 5$
$y_0 = 10$

x	0	1	2	3	4	5
y	35	26	19	14	11	10

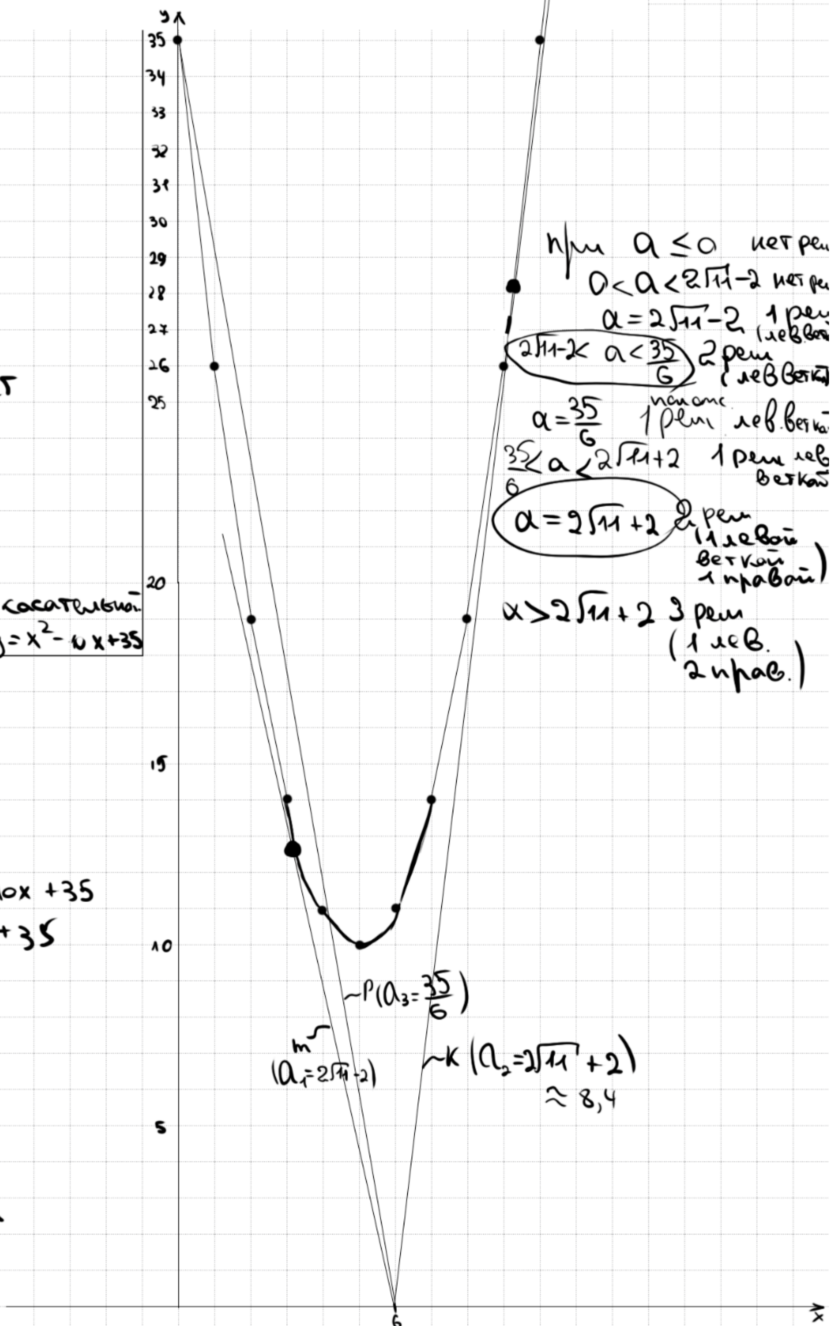
Если $a \le 0$, то решений нет
$\Rightarrow a > 0$

Найдём a_1 для прямой m:
$y = a|x-6|$
$y = a\cdot(-x+6) = -ax + 6a$ является касательной для параболы $y = x^2 - 10x + 35$

$\begin{cases} (-ax+6a)' = (x^2-10x+35)' \\ (-ax+6a) = x^2 - 10x + 35 \end{cases}$

① $-a = 2x - 10$
$a = 10 - 2x$

② $-x\cdot(10-2x) + 6\cdot(10-2x) = x^2 - 10x + 35$
$\cancel{-10x} + 2x^2 + 60 - 12x = x^2 \cancel{-10x} + 35$
$x^2 - 12x + 25 = 0$
$D = 144 - 100 = 44 = (2\sqrt{11})^2$
$x = \dfrac{12 \pm 2\sqrt{11}}{2} = 6 \pm \sqrt{11}$
$X_{\text{нашего касания}} = 6 - \sqrt{11}$
$a = 10 - 2\cdot(6-\sqrt{11}) = 2\sqrt{11} - 2$



при $a \le 0$ нет реш
$0 < a < 2\sqrt{11} - 2$ нет реш
$a = 2\sqrt{11} - 2$ 1 реш (лев ветка)
$2\sqrt{11} - 2 < a < \frac{35}{6}$ 2 реш (лев ветка)
$a = \frac{35}{6}$ 1 реш лев. ветка (положит.)
$\frac{35}{6} < a < 2\sqrt{11} + 2$ 1 реш лев ветка
$a = 2\sqrt{11} + 2$ 2 реш (1 левой веткой 1 правой)
$a > 2\sqrt{11} + 2$ 3 реш (1 лев. 2 прав.)

Найдём a_2 для прямой k
$y = a|x-6|$
$y = ax - 6a$ является касат. для $y = x^2 - 10x + 35$
$\begin{cases} a = 2x - 10 \\ ax - 6a = x^2 - 10x + 35 \end{cases}$
$(2x-10)\cdot x - 6\cdot(2x-10) = x^2 - 10x + 35$
$2x^2 \cancel{-10x} - 12x + 60 = x^2 \cancel{-10x} + 35$
$x^2 - 12x + 25 = 0$
$D = (2\sqrt{11})^2$
$x = \dfrac{12 \pm 2\sqrt{11}}{2}$
$X_{\text{нашего касания}} = 6 + \sqrt{11}$. $Y_{\text{нашего касания}} = (6+\sqrt{11})^2 - 10\cdot(6+\sqrt{11}) + 35$
$= 36 + 12\sqrt{11} + 11 - 60 - 10\sqrt{11} + 35$
$= 22 + 2\sqrt{11} \approx 28{,}4$
$a = 2\cdot(6+\sqrt{11}) - 10 = 2 + 2\sqrt{11}$

Найдём a_3 для прямой p.
$y = -ax + 6a$ проходит через точку $(0; 35)$
$35 = -a\cdot 0 + 6a$
$a = \frac{35}{6}$

Ответ: $\left(2\sqrt{11} - 2; \frac{35}{6}\right) \cup \{2\sqrt{11} + 2\}$.

#48 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$6a+\sqrt{5+4x-x^2}=ax+3$$

имеет единственный корень.

1C9A53

Источники:
FIPI
osfipi
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018
Ященко 2018
Ященко 2018
Семёнов 2015
Основная волна 2013

ур-е окр-ти:
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

$\sqrt{5+4x-x^2}=a\cdot x-6a+3$

Преобразуем подкоренное выражение:

$5+4x-x^2$

$-x^2+4x+5$

$(-x^2+4x-4)+4+5$

$-(x^2-4x+4)+9$

$9-(x-2)^2$

Получаем:

$\sqrt{9-(x-2)^2}=a\cdot(x-6)+3$

Решим графически:

$y=\sqrt{9-(x-2)^2}$

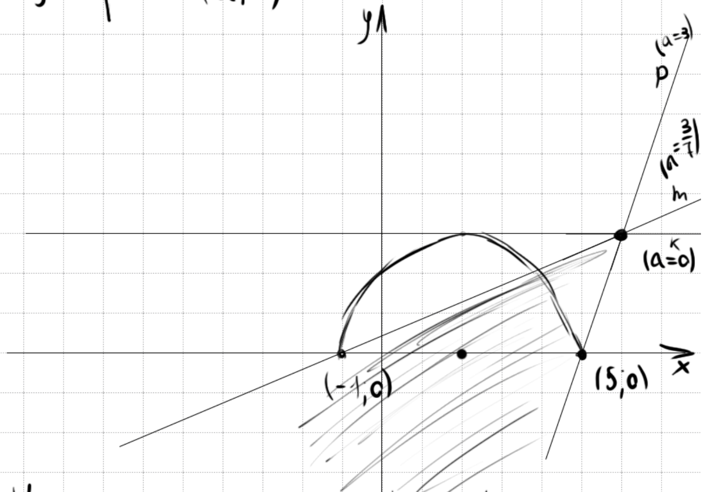
$\begin{cases} y\geq 0 \\ y^2=9-(x-2)^2 \end{cases}$

$y=a\cdot(x-6)+3$

Правая часть уравнения - это „Пучок" прямых, проходящих через точку $(6;3)$

$\begin{cases} y\geq 0 \\ (x-2)^2+y^2=9 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Левая часть уравнения – это полуокружность с центром $(2;0)$ и $R=3$



Найдём значение параметра a для прямой p, проходящей через точку $(5;0)$

$y=a\cdot(x-6)+3$

$0=a\cdot(5-6)+3$

$a=3$

Найдём значение параметра a для прямой m, проходящей через точку $(-1;0)$

$y=a\cdot(x-6)+3$

$0=a\cdot(-1-6)+3$

$7a=3$

$a=\frac{3}{7}$

при $a\ \left(\frac{3}{7};3\right]$ 1 реш

при $a=0$ 1 реш

Ответ: $\{0\}\cup\left(\frac{3}{7};3\right]$.

#49 (ДЗ)

Ответа пока что нет

#51 (ДЗ)

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

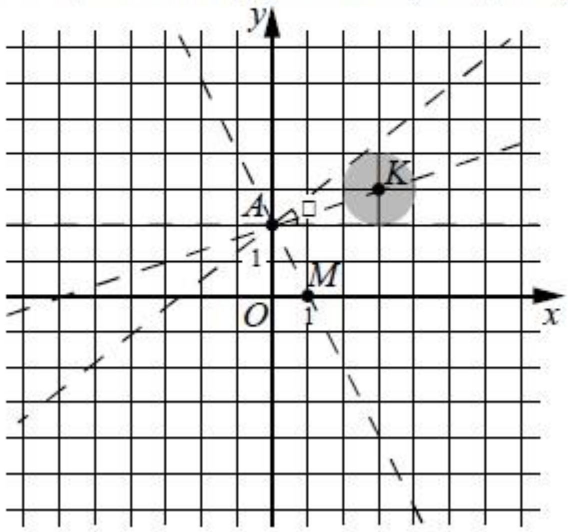
$$\begin{cases}\left(\left(x-3\right)^2+\left(y-3\right)^2-1\right)\left(\left(x-1\right)^2+y^2\right)\le 0,\\ y-2=ax\end{cases}$$

не имеет решений.

Решение.

Уравнение $y=ax+2$ задает прямую. Эта прямая при всех a проходит через точку $A(0;2)$.

Неравенство системы $\left(\left(x-3\right)^2+\left(y-3\right)^2-1\right)\left(\left(x-1\right)^2+y^2\right)\le 0$ задаёт объединение круга с центром в точке $K(3;3)$ и радиусом 1 и точки $M(1;0)$. Система не будет иметь решений тогда и только тогда, когда прямая $y=ax+2$ не имеет общих точек с кругом и не проходит через точку M.



Пусть α – угол между касательными к окружности $(x-3)^2+(y-3)^2=1$, проведёнными из точки A(0; 2). Тогда тангенс угла $\frac{\alpha}{2}$, образованного этими касательными с прямой с прямой AK, равен $\frac{1}{3}$ (см. рис.). Воспользовавшись формулой тангенса двойного угла, получим $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}$. Значит, для касательных к окружности $a=0$ и $a=\frac{3}{4}$.

Прямая AM имеет угловой коэффициент $a=-2$.

Отсюда получаем ответ: $a<-2;\ -2<a<0;\ a>\frac{3}{4}$.

Ответ: $(-\infty;-2);\ (-2;0);\ \left(\frac{3}{4};+\infty\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
Начато верное рассуждение и даже получено одно какое-нибудь значение параметра, но до конца задача не доведена	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямой и окружности (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

#52 (ДЗ)

208. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} 4x^2 + (13a-4)x + 3a^2 - 12a < 0, \\ x^2 + a^2 = 36 \end{cases}$ имеет решения.

Решение. Построим кривые, соответствующие неравенству и уравнению системы, в системе координат с осями a и x. Уравнение системы задаёт окружность с центром в начале координат и радиусом 6 (см. рис. 120). Неравенство системы может быть переписано в виде $(x+3a)(4x+a-4) < 0$, поэтому задаёт части плоскости внутри углов ABC и DBE, образованных прямыми $x = -3a$ и $x = -\frac{a}{4} + 1$. Решениями системы являются дуги AC и DE окружности. Следовательно, остаётся найти значения a, соответствующие этим дугам.

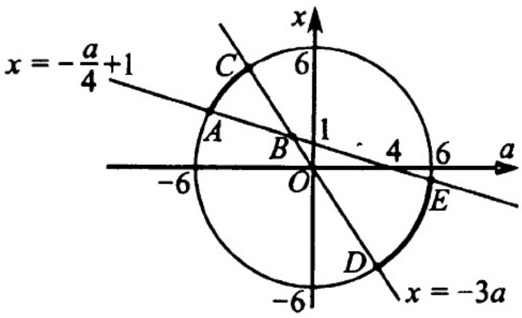


Рис. 120.

Координаты точек C и D находим из системы $\begin{cases} x = -3a, \\ x^2 + a^2 = 36; \end{cases}$

$9a^2 + a^2 = 36$; $a = \pm\frac{3\sqrt{10}}{5}$.

Точка C расположена в левой полуплоскости, а точка D — в правой, поэтому точке C соответствует значение $a = -\frac{3\sqrt{10}}{5}$, точке D — значение $a = \frac{3\sqrt{10}}{5}$.

Абсциссы точек A и E находим из системы

$$\begin{cases} x = -\frac{a}{4} + 1, \\ x^2 + a^2 = 36; \end{cases}$$

$(a-4)^2 + 16a^2 = 576$; $17a^2 - 8a - 560 = 0$; $a = \frac{4 \pm 8\sqrt{149}}{17}$.

Точка A расположена в левой полуплоскости, а точка E — в правой, поэтому точке A соответствует значение $a = \frac{4 - 8\sqrt{149}}{17}$, точке E — значение $a = \frac{4 + 8\sqrt{149}}{17}$.

Таким образом, исходная система имеет решение при

$a \in \left(\frac{4-8\sqrt{149}}{17}; -\frac{3\sqrt{10}}{5}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{10}}{5}; \frac{4+8\sqrt{149}}{17}\right)$.

Ответ: $\left(\frac{4-8\sqrt{149}}{17}; -\frac{3\sqrt{10}}{5}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{10}}{5}; \frac{4+8\sqrt{149}}{17}\right)$.

#53 (ДЗ)

2. -16; 9; 33.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases}(a+14x+9)(a-2x+9)\leqslant 0\\ a+8x\geqslant x^2\end{cases}$ имеет единственное решение.

#54 (ДЗ)

18. Задание 18 № 516803

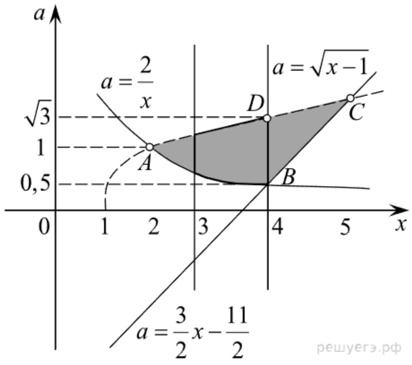
Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} ax \geq 2, \\ \sqrt{x-1} > a, \\ 3x \leq 2a+11 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке [3; 4].

Решение.

Изобразим множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств, на координатной плоскости xOa. Гипербола $a = \frac{2}{x}$ и график корня $a = \sqrt{x-1}$ пересекаются в точке $A(2;\ 1)$. Гипербола и прямая $a = \frac{3}{2}x - \frac{11}{2}$ пересекаются в точке $B\left(4;\ \frac{1}{2}\right)$. График корня и прямая пересекаются в точке $C(5;\ 2)$. Множество точек, координаты которых удовлетворяют заданной системе (выделено штриховкой на рисунке), состоит из точек криволинейного треугольника ABC, не включая границу, лежащую на дуге AC.



Поскольку система должна иметь хотя бы одно решение на отрезке [3; 4], осталось определить наименьшую и наибольшую ординаты проекции выделенного на рисунке четырехугольника на ось ординат. Проекции точек B и $D(4;\ \sqrt{3})$ дают искомое множество: заданная система неравенств имеет хотя бы одно решение на отрезке [3; 4] при $\frac{1}{2} \leq a < \sqrt{3}$.

Ответ: $\frac{1}{2} \leq a < \sqrt{3}$.

Приведем аналитическое решение. Заметим, что искомыми могут быть только положительные значения параметра и запишем систему в виде

$$\begin{cases} x \geq \frac{2}{a}, \\ x > a^2+1, \\ x \leq \frac{2a+11}{3}. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\frac{2}{a} = a^2+1 \Leftrightarrow a = 1,$$

и рассмотрим три случая.

Если $a = 1$, то решением системы является полуинтервал $\left(1;\ \frac{13}{3}\right]$, имеющий общие точки с отрезком [3; 4].

Если $a < 1$, то $\frac{2}{a} > a^2+1$. Тогда решением системы является отрезок $\left[\frac{2}{a};\ \frac{2a+11}{3}\right]$. Он существует, если

$$\frac{2}{a} < \frac{2a+11}{3} \Leftrightarrow 2a^2+11a-6 > 0 \underset{a>0}{\Leftrightarrow} a > \frac{1}{2},$$

и пересекается с отрезком [3; 4] тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \frac{2a+11}{3} > 3, \\ \frac{2}{a} < 4 \end{cases} \Leftrightarrow a > \frac{1}{2}.$$

При $a = \frac{1}{2}$ этот отрезок вырождается в точку 4, система имеет единственное решение $x = 4$, это решение лежит на отрезке [3; 4].

Если $a > 1$, то $\frac{2}{a} < a^2+1$. В этом случае решением системы является полуинтервал $\left(a^2+1;\ \frac{2a+11}{3}\right]$. Этот полуинтервал существует, если

$$a^2+1 < \frac{2a+11}{3} \Leftrightarrow 3a^2-2a-8 < 0 \underset{a>1}{\Leftrightarrow} 1 < a < 2,$$

и имеет общие точки с отрезком [3; 4] тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \frac{2a+11}{3} > 3, \\ a^2+1 < 4 \end{cases} \underset{a>1}{\Leftrightarrow} 1 < a < \sqrt{3}.$$

Объединяя рассмотренные случаи, получаем ответ: $\frac{1}{2} \leq a < \sqrt{3}$.

#55 (ДЗ)

6. Задание 18 № 514510

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

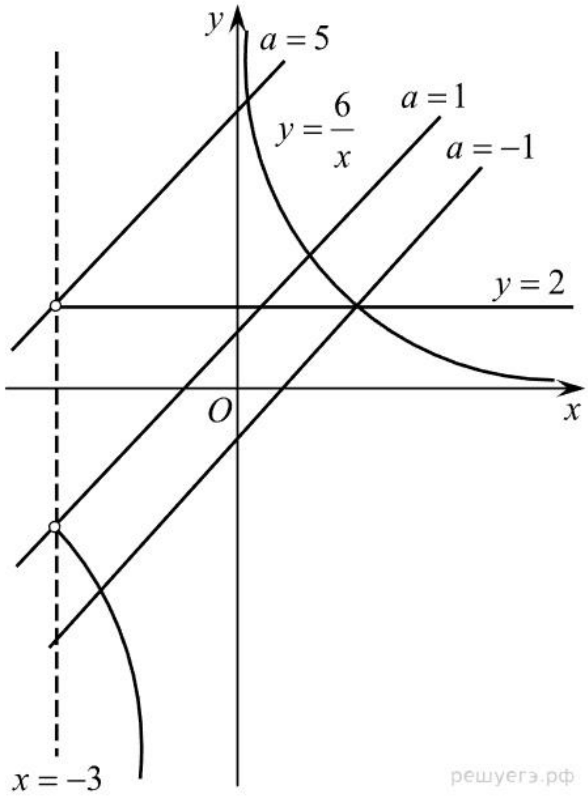
$$\begin{cases} \dfrac{xy^2-2xy-6y+12}{\sqrt{x+3}}=0, \\ y=x+a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение.

Запишем первое уравнение в виде

$$\frac{(y-2)(xy-6)}{\sqrt{x+3}}=0.$$



При $x\le-3$ левая часть не имеет смысла. При $x>-3$ уравнение задаёт прямую $y=2$ и гиперболу $y=\frac{6}{x}$ (см. рисунок).

При каждом значении a уравнение $y=x+a$ задаёт прямую, параллельную прямой $y=x$ или совпадающую с ней.

При $x>-3$ такая прямая пересекает прямую $y=2$ при $a<5$, пересекает правую ветвь гиперболы $y=\frac{6}{x}$ при любом значении a, пересекает левую ветвь гиперболы $y=\frac{6}{x}$ при $a<1$. При этом прямая $y=x+a$ проходит через точку пересечения прямой $y=2$ и гиперболы $y=\frac{6}{x}$ при $a=-1$.

Число решений исходной системы равно числу точек пересечения прямой $y=2$ и гиперболы $y=\frac{6}{x}$ с прямой $y=x+a$ при условии $x>-3$. Таким образом, исходная система имеет ровно два решения при $a=-1;\ 1\le a<5$.

Ответ: $a=-1;\ 1\le a<5$.

#58 (ДЗ)

20 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2 - xy - 7y + 4x + 12)\sqrt{x+4}}{\sqrt{7-y}} = 0, \\ a = x + y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

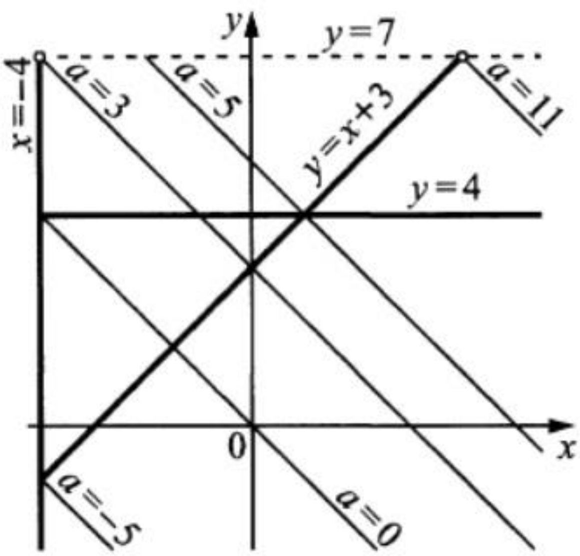
Решение.

Запишем первое уравнение в виде

$$\frac{(y-4)(y-3-x)\sqrt{x+4}}{\sqrt{7-y}} = 0.$$

При $x < -4$ и $y \geq 7$ левая часть не имеет смысла. При $x \geq -4$ и $y < 7$ уравнение задаёт прямые $y = 4$, $y = x + 3$, $x = -4$ (см. рис.).

При каждом значении a уравнение $a = x + y$ задаёт прямую, параллельную прямой $x + y = 0$ или совпадающую с ней. При $x \geq -4$ и $y < 7$ такая прямая пересекает прямую $y = 4$ при $a \geq 0$, пересекает прямую $y = x + 3$ при $-5 \leq a < 11$, пересекает прямую $x = -4$ при $a < 3$. При этом прямая $a = x + y$ проходит через точки пересечения прямых $x = -4$, $y = 4$ и $y = x + 3$ при $a = -5$, $a = 0$ и $a = 5$.



Число решений исходной системы равно числу точек пересечения прямых $y = 4$, $y = x + 3$, $x = -4$ с прямой $a = x + y$ при условиях $x \geq -4$ и $y < 7$. Таким образом, исходная система имеет единственное решение при $a \leq -5$; $a = 5$; $a \geq 11$.

Ответ: $a \leq -5$; $a = 5$; $a \geq 11$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только исключением точки $a = 11$	3
С помощью верного рассуждения получен один из промежутков множества значений a: $(-\infty; -5]$ или $[11; +\infty)$, возможно, с исключением граничных точек	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямых (аналитически или графически) ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

#59 (ДЗ)

Ответа пока что нет

#60 (ДЗ)

18. Задание 18 № 513610

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

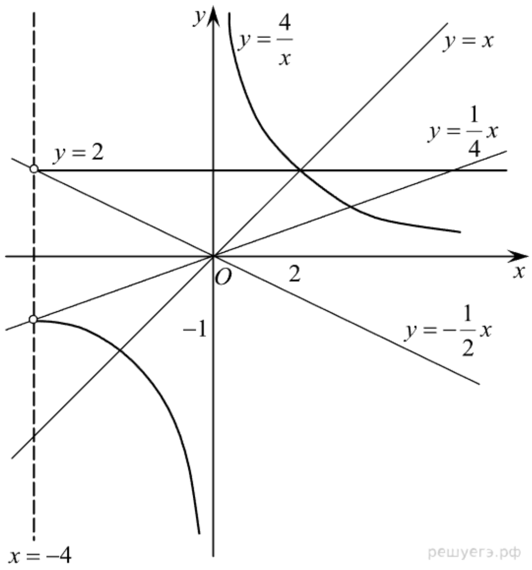
$$\begin{cases} \dfrac{xy^2-2xy-4y+8}{\sqrt{x+4}}=0, \\ y=ax \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение.

Графическое решение. Запишем первое уравнение системы в виде

$$\frac{(y-2)(xy-4)}{\sqrt{x+4}}=0.$$



При $x \le -4$ левая часть не имеет смысла. При $x>-4$ уравнение задаёт прямую $y=2$ и гиперболу $y=\frac{4}{x}$ (см. рис.). При каждом значении a уравнение $y=ax$ задаёт прямую с угловым коэффициентом a, проходящую через начало координат.

Число решений исходной системы равно числу точек пересечения прямой $y=2$ и гиперболы $y=\frac{4}{x}$ с прямой $y=ax$ при условии $x>-4$.

Прямая $y=ax$ пересекает прямую $y=2$ при $a<-\frac{1}{2}$ и при $a>0$; пересекает правую ветвь гиперболы при $a>0$, пересекает левую ветвь гиперболы при $a>\frac{1}{4}$, проходит через точку пересечения прямой $y=2$ и гиперболы при $a=1$.

Таким образом, исходная система имеет ровно два решения при $0<a \le \frac{1}{4}$ и при $a=1$.

Аналитическое решение. Запишем первое уравнение системы в виде

$$\frac{(y-2)(xy-4)}{\sqrt{x+4}}=0.$$

Тогда исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y-2=0, \\ xy-4=0, \end{array}\right. \\ x+4>0, \\ y=ax \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} ax=2, \\ ax^2=4, \end{array}\right. \\ x>-4, \\ y=ax. \end{cases}$$

При $a=0$ система решений не имеет. В противном случае, первое уравнение имеет корень $x_1=\frac{2}{a}$, который удовлетворяет системе при $a \in \left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right) \cup (0,\ +\infty)$. Вторoе уравнение имеет два различных корня $x_2=\frac{2}{\sqrt{a}}$, $x_3=-\frac{2}{\sqrt{a}}$ только при $a>0$, причем, x_2 является корнем системы при любом положительном a, а x_3 при $a>\frac{1}{4}$. Таким образом система будет иметь два различных решения при $0<a \le \frac{1}{4}$. Кроме того, положительные корни x_1 и x_2 могут совпасть $\frac{2}{a}=\frac{2}{\sqrt{a}}$, это происходит при $a=1$.

Ответ: $0<a \le \frac{1}{4}$, $a=1$.

Примечание.

Полезно сравнить это задание с аналогичной задачей досрочного ЕГЭ 2015 года: найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2-xy-4y+2x+4)\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-y}}=0, \\ a=x+y. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

#61 (ДЗ)

6. Задание 18 № 513924

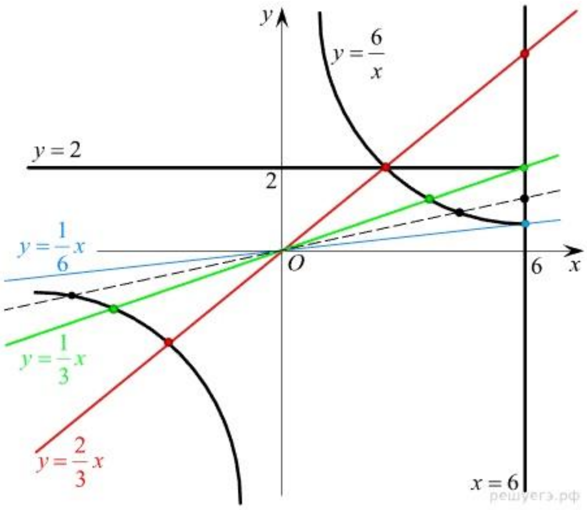
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (xy^2-2xy-6y+12)\sqrt{6-x}=0, \\ y=ax \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение.

Преобразуем первое уравнение системы:



$$(xy^2-2xy-6y+12)\sqrt{6-x}=0 \Leftrightarrow (xy(y-2)-6(y-2))\sqrt{6-x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (xy-6)(y-2)\sqrt{6-x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=\frac{6}{x}, \\ y=2, \\ x=6, \end{array}\right. \\ x\le 6. \end{cases}$$

Исходная система имеет ровно три различных решения тогда и только тогда, когда графики функций $y=\frac{6}{x}$ и $y=2$ и прямая $x=6$ имеют с прямой $y=ax$ три различных точки пересечения на области $x\le 6$ (см. рис.).

Из рисунка видно, что при $a<0$ два решения, при $a=0$ одно решение, при $0<a\le\frac{1}{6}$ два решения, при $\frac{1}{6}<a\le\frac{1}{3}$ **три решения**, при $\frac{1}{3}<a<\frac{2}{3}$ четыре решения, при $a=\frac{2}{3}$ **три решения**, при $a>\frac{2}{3}$ четыре решения.

Ответ: $\left(\frac{1}{6};\ \frac{1}{3}\right]\cup\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

#62 (ДЗ)

1014. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2 - 2xy - 4y + 8}{\sqrt{4-y}} = 0, \\ y = ax \end{cases}$$ имеет ровно три различных решения.

Решение.

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2 - 2xy - 4y + 8}{\sqrt{4-y}} = 0 \\ y = ax \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)(xy-4) = 0 \\ 4 > y = ax \end{cases}$$

I. *Алгебраический способ*: система

при $a = 0$ решений не имеет (иначе из неё вытекает: $y = 0$ и $0 = 8$);

при $a \neq 0$ приводится к виду

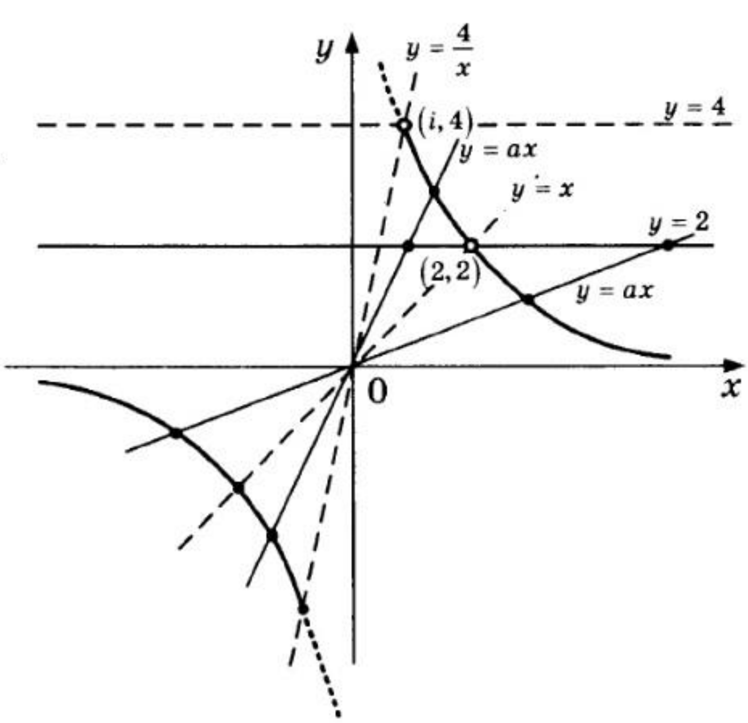
$$\begin{cases} (y-2)(y^2 - 4a) = 0 \\ 4 > y = ax \end{cases}$$

и поэтому:

2.1) при $a < 0$ имеет только 1 решение ($ax = y = 2$),

2.2) при $a > 0$ имеет ровно 3 решения ($ax = y = 2, \pm\sqrt{4a}$) тогда и только тогда, когда $4 > \sqrt{4a} \neq 2 \Leftrightarrow 4 > a \neq 1$.

II. *Графический способ* (см. рис.): решения системы — это точки пересечения прямой $y = ax$ с прямой $y = 2$ и гиперболой $xy = 4$, расположенные ниже прямой $y = 4$.



Ответ: $0 < a < 1,\ 1 < a < 4$.

#64 (ДЗ)

9. $[-2{,}5;\ -1) \cup (-1;\ 0{,}5]$.

9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений $\begin{cases} y = \sqrt{5-8x-4x^2}+2 \\ y+2a = \sqrt{9-4a^2+8ax-4x^2}. \end{cases}$

#65 (ДЗ)

18	$-\dfrac{\sqrt{10}+1}{9};\ \dfrac{\sqrt{10}-1}{9};[1{,}4;\ 2)$

18 Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\left(y-\sqrt{10-x^2}\right)\left((x+5)^2+(y+5)^2-10(x+7{,}5)+x^2-y^2+5\right)}{\sqrt{x^2-1}}=0, \\ y=ax+a-1. \end{cases}$$

имеет одно решение.

#66 (ДЗ)

1

Задание 18 № 507190

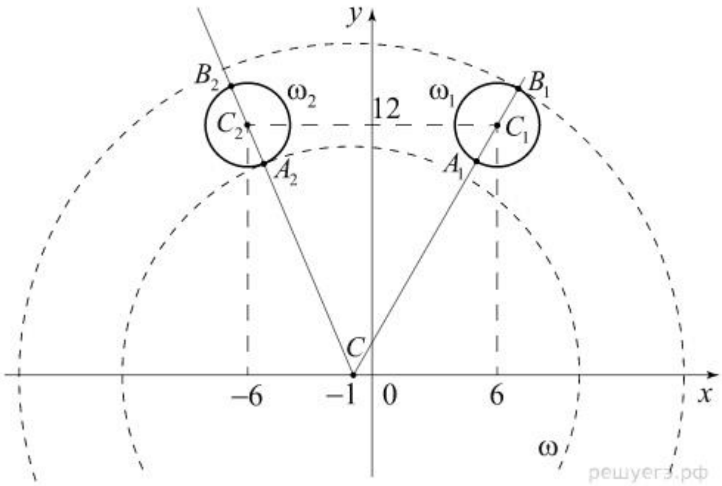
Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x|-6)^2+(y-12)^2=4, \\ (x+1)^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Если $x \geq 0$, то уравнение $(|x|-6)^2+(y-12)^2=4$ задаёт окружность ω_1, с центром в точке $C_1(6;\ 12)$ радиуса 2, а если $x<0$, то оно задаёт окружность ω_2 с центром в точке $C_2(-6;\ 12)$ того же радиуса (см. рис.).



При положительных значениях параметра a уравнение $(x+1)^2+y^2=a^2$ задает окружность ω с центром в точке $C(-1;\ 0)$ радиуса a. Поэтому задача состоит в том, чтобы найти все значения параметра a, при каждом из которых окружность ω имеет единственную общую точку с объединением окружностей ω_1 и ω_2.

Из точки C проведём луч CC_1 и обозначим A_1 и B_1 точки его пересечения с окружностью ω_1, где A_1 лежит между C и C_1. Так как $CC_1=\sqrt{(1+6)^2+12^2}=\sqrt{193}$, то $CA_1=\sqrt{193}-2,\ CB_1=\sqrt{193}+2$.

При $a<CA_1$ или $a>CB_1$ окружности ω_1 и ω не пересекаются. При $CA_1<a<CB_1$ окружности ω_1 и ω имеют две общие точки. При $a=CA_1$ или $a=CB_1$ окружности ω_1 и ω касаются.

Из точки C проведём луч CC_2 и обозначим A_2 и B_2 точки его пересечения с окружностью ω_2, где A_2 лежит между C и C_2. Так как $CC_2=\sqrt{(6-1)^2+12^2}=13$, то $CA_2=13-2=11,\ CB_2=13+2=15$.

При $a<CA_2$ или $a>CB_2$ окружности ω и ω_2 не пересекаются. При $CA_2<a<CB_2$ окружности ω и ω_2 имеют две общие точки. При $a=CA_2$ или $a=CB_2$ окружности ω и ω_2 касаются.

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность ω касается ровно одной из двух окружностей ω_1 и ω_2, и не пересекается с другой. Так как $CA_2<CA_1<CB_2<CB_1$, то условию задачи удовлетворяют только числа $a=11$ и $a=\sqrt{193}+2$.

Ответ: 11, $\sqrt{193}+2$.

Аналоги к заданию № 484649: 484650 485952 507190 510023 Все

Раздел кодификатора ФИПИ/Решу ЕГЭ: Уравнение окружности

Спрятать решение · Прототип задания · В избранное (13) · Поделиться · Сообщить об ошибке · Помощь

#67 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} |x|+|a|<4, \\ x^2+16a \le 8x+48 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[0;1]$.

Ответ: $-4<a<8\sqrt{2}-8$.

#68 (ДЗ)

1 **Задание 18 № 526917**

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2-20x+y^2+20y+75=|x^2+y^2-25|, \\ x-y=a \end{cases}$$

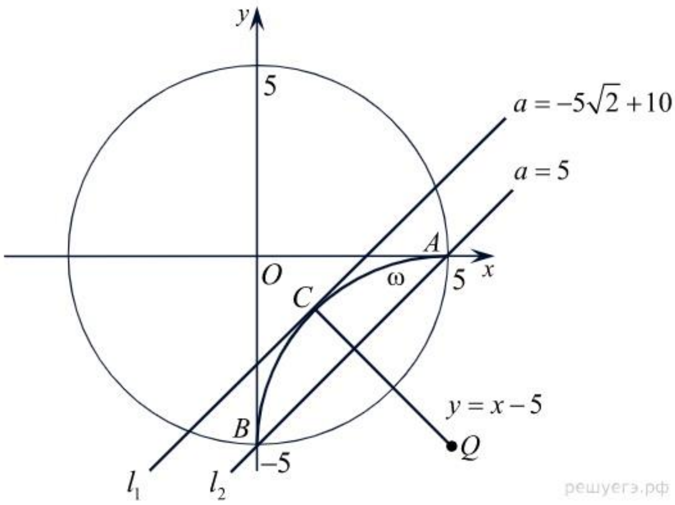
имеет более одного решения.

Решение.

Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.

Рассмотрим два случая:

1) Если $x^2+y^2\geq 25$, имеем:



$$x^2-20x+y^2+20y+75=x^2+y^2-25 \Leftrightarrow y=x-5.$$

Полученное уравнение задает прямую с коэффицентом наклона $k=1$ и проходящую через точки $(0;-5)$ и $(5;0)$.

2) Если $x^2+y^2\neq 25$, имеем:

$$x^2-20x+y^2+20y+75=-x^2-y^2+25 \Leftrightarrow (x-5)^2+(y+5)^2=5^2.$$

Полученное уравнение задает окружность с центром в точке $Q(5;-5)$ и радиусом 5.

Полученные прямая и окружность пересекаются в двух точках $A(5;0)$ и $B(0;-5)$, лежащих на окружности $x^2+y^2=25$, поэтому в первом случае получаем два луча l_1 и l_2 с концами в точках A и B соответсвенно, во втором — дугу ω с концами в тех же точках точках (см. рис.). Заметим, что точка $C\left(5-\frac{5\sqrt{2}}{2}; -5+\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ лежит на дуге ω и отрезок QC перпендикулярен прямой, полученной в первом случае.

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задает прямую m, параллельную лучам l_1 и l_2 или содержащую их.

При $a=5$ прямая m содержит лучи l_1 и l_2, то есть исходная система имеет бесконечное число решений.

При $a=-5\sqrt{2}+10$ прямая m проходит через точку C, значит, прямая m касается дуги ω и не имеет общих точек с лучами l_1 и l_2, то есть исходная система имеет одно решение.

При $-5\sqrt{2}+10<a<5$ прямая m пересекает дугу ω в двух точках и не имеет общих точек с лучами l_1 и l_2, то есть исходная система имеет два решения.

При $a<-5\sqrt{2}+10$ или $a>5$ прямая m не имеет общих точек с лучами l_1 и l_2 и дугой ω, то есть исходная система не имеет решений.

Значит, исходная система имеет более одного решения при $-5\sqrt{2}+10<a\leq 5$.

Ответ: $(-5\sqrt{2}+10; 5]$.

Аналоги к заданию № 526911: 526917 Все

Источник: Типовые тестовые задания по математике под редакцией И.В. Ященко, 2019.

Спрятать решение · Прототип задания · В избранное (0) · Поделиться · Сообщить об ошибке · Помощь

#69 (ДЗ)

Задача 18

Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2+4x-8=|4x^2+4x-8| \\ 2x-y=a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

(ЕГЭ 2015, резервный день)

Ответ

$\{0\}\cup(4;-2+2\sqrt{10})$

Решение

Выражая из второго уравнения y и подставляя результат в первое уравнение исходной системы, получим

$$(2x-a)^2+4x-8=|4x^2+4x-8| \quad\Leftrightarrow\quad 4x^2+(4-4a)x-8+a^2=|4x^2+4x-8|\,,$$

таким образом, задача сводится к нахождению всех a, при которых полученное уравнение имеет более двух решений.

Рассмотрим два случая:

1)

$$4x^2+4x-8\geqslant 0 \qquad\Leftrightarrow\qquad x\in(-\infty;-2]\cup[1;+\infty)\,.$$

В этом случае уравнение примет вид

$$4x^2+(4-4a)x-8+a^2=4x^2+4x-8 \quad\Leftrightarrow\quad -4ax+a^2=0$$

– при $a\neq 0$ это линейное уравнение, следовательно, при $a\neq 0$ оно имеет не более одного решения на рассматриваемом множестве. При $a=0$ у него бесконечно много решений, следовательно, $a=0$ идёт в ответ.

2)

$$4x^2+4x-8<0 \qquad\Leftrightarrow\qquad x\in(-2;1)\,.$$

В этом случае уравнение примет вид

$$4x^2+(4-4a)x-8+a^2=-4x^2-4x+8 \quad\Leftrightarrow\quad 8x^2+(8-4a)x-16+a^2=0$$

– квадратное уравнение, следовательно, оно имеет не более двух решений на рассматриваемом множестве.

Пусть $a\neq 0$. Так как требуется, чтобы уравнение, полученное в начале решения, имело три корня или более, то нам необходимо и достаточно, чтобы в пункте 1) было одно решение, а в пункте 2) было два различных решения.

Тогда согласно пункту 1) $a\neq 0$ и $x=0,25a$, откуда

$$0,25a\in(-\infty;-2]\cup[1;+\infty) \qquad\Leftrightarrow\qquad a\in(-\infty;-8]\cup[4;+\infty)\,.$$

При этом из пункта 2) имеем: дискриминант

$$D=(8-4a)^2-32(-16+a^2)=64-64a+16a^2+32\cdot 16-32a^2=576-64a-16a^2$$

чтобы уравнение имело хоть какие-нибудь различные два корня, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено

$$D>0 \qquad\Leftrightarrow\qquad a^2+4a-36<0 \qquad\Leftrightarrow\qquad -2-2\sqrt{10}<a<-2+2\sqrt{10}$$

Кроме того, корни уравнения в пункте 2) должны удовлетворять неравенству $-2<x<1$:

$$-2<\frac{a-2\pm\sqrt{36-4a-a^2}}{4}<1\,,$$

что равносильно системе

$$\begin{cases} a-2+\sqrt{36-4a-a^2}<4 \\ a-2-\sqrt{36-4a-a^2}>-8 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \sqrt{36-4a-a^2}<6-a \\ -\sqrt{36-4a-a^2}>-6-a \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \sqrt{36-4a-a^2}<6-a \\ \sqrt{36-4a-a^2}<6+a \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 2a^2-8a>0 \\ 2a^2+16a>0 \\ -6<a<6 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad a\in(4;6)\,.$$

Итого, в случае $a\neq 0$ подходят a, для которых выполняются условия

$$\begin{cases} a\in(-\infty;-8]\cup[4;+\infty) \\ -2-2\sqrt{10}<a<-2+2\sqrt{10} \\ a\in(4;6)\,. \end{cases}$$

откуда находим $a\in(4;-2+2\sqrt{10})$.

Окончательный ответ:

$$a\in\{0\}\cup(4;-2+2\sqrt{10})\,.$$

#70 (ДЗ)
Ответа пока что нет
#71 (ДЗ)

6. Задание 18 № 510111

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2-2x+y^2-4y=2|x+2y-5|, \\ 2x-y=a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Решение.

Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.

Рассмотрим два случая:

1) Если $x + 2y - 5 \geq 0$, то получаем уравнение

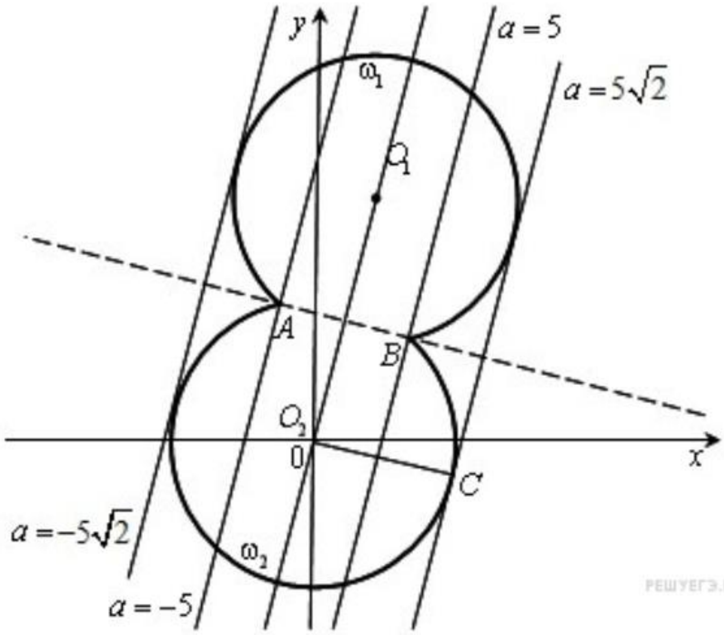
$$x^2-2x+y^2-4y=2x+4y-10;$$
$$x^2-4x+y^2-8y+10=0;$$
$$(x-2)^2+(y-4)^2=10.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_1(2;\,4)$ и радиусом $\sqrt{10}$.

2) Если $x + 2y - 5 \leq 0$, то получаем уравнение

$$x^2-2x+y^2-4y=10-2x-4y \Leftrightarrow x^2+y^2=10.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_2(0;\,0)$ и радиусом $\sqrt{10}$.



Полученные окружности пересекаются в двух точках $A(-1;\,3)$ и $B(3;\,1)$, лежащих на прямой $x+2y-5=0$, поэтому в первом случае получаем дугу ω_1 с концами в точках A и B, во втором — дугу ω_2 с концами в тех же точках (см. рис.).

Заметим, что точка $C(2\sqrt{2};\,-\sqrt{2})$ лежит на дуге ω_2 и прямая O_2C перпендикулярна прямой O_1O_2.

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую m, параллельную прямой O_1O_2 или совпадающую с ней.

При $a=-5$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в точке A и ещё в одной точке, отличной от точки A, то есть исходная система имеет три решения.

Аналогично, при $a = 5$ прямая m проходит через точку B и исходная система имеет три решения.

При $a=-5\sqrt{2}$ прямая m проходит через точку C, значит, прямая m касается дуг ω_2 и ω_1, то есть исходная система имеет два решения.

Аналогично, при $a=5\sqrt{2}$ прямая m касается дуг ω_2 и ω_1, то есть исходная система имеет два решения.

При $-5\sqrt{2}<a<-5$ или $5<a<5\sqrt{2}$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в двух точках, отличных от точек A и B, то есть исходная система имеет четыре решения.

При $-5 < a < 5$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в точке, отличной от точек A и B, то есть исходная система имеет два решения.

При $a<-5\sqrt{2}$ или $a>5\sqrt{2}$ прямая m не пересекает дуги ω_1 и ω_2, то есть исходная система не имеет решений.

Значит, исходная система имеет более двух решений при $-5\sqrt{2}<a\leq-5$ или $5\leq a<5\sqrt{2}$.

Ответ: $-5\sqrt{2}<a\leq-5;\ 5\leq a<5\sqrt{2}$.

#73 (ДЗ)

6. Задание 18 № 514635

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x-2)(2x-4-y)=|x-2|^3, \\ y=x+a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение.

Сделаем замену $x-2=t$ и заметим, что $y=t+a+2$. Очевидно, число решений системы будет совпадать с числом решений уравнения $t(t-a-2)=|t|^3$. Очевидно, $t=0$ является его решением при всех a.

При $t>0$ уравнение сводится к $t^2=t-a-2$, $(t-0,5)^2=-a-1,75$. Это уравнение имеет два положительных корня, если $-a-1,75\in(0;0,25)$, то есть при $a\in(-2;-1,75)$ и один положительный корень при $a=-1,75$ или $a<-2$.

При $t<0$ уравнение сводится к $-t^2=t-a-2$, $(t+0,5)^2=a+2,25$. Это уравнение имеет два отрицательных корня, если $a+2,25\in(0;\ 0,25)$, то есть при $a\in(-2.25;-2)$ и один отрицательный корень при $a=-2,25$ или $a>-2$.

Поэтому нужное количество корней будет при $a\in(-2;-1,75)$, $a\in(-2,25;-2)$.

Ответ: $a\in(-2,25;-2)\cup(-2;-1,75)$.

#74 (ДЗ)

6. Задание 18 № 514559

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x(x^2+y^2-2y-8) = |x|(2y-8), \\ y = x+a \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение.

Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.

Рассмотрим три случая.

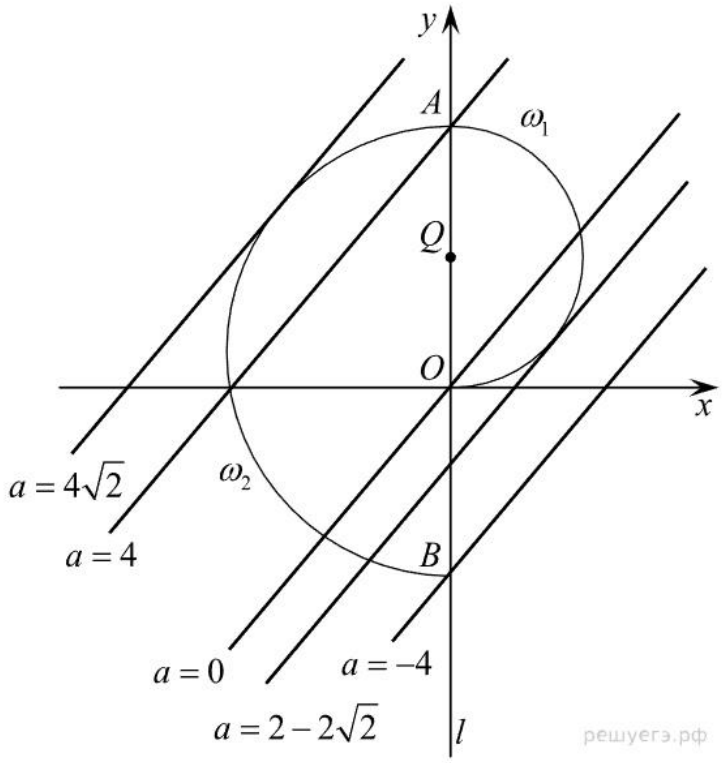
1) Если $x > 0$, то получаем уравнение

$$x(x^2+y^2-2y-8) = x(2y-8) \underset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2-4y=0 \Leftrightarrow x^2+(y-2)^2=4.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $Q(0;\,2)$ и радиусом 2.

2) Если $x=0$, то координаты любой точки прямой $x=0$ удовлетворяют уравнению.

3) Если $x<0$, то получаем уравнение



$$x(x^2+y^2-2y-8) = x(8-2y) \underset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} x^2+y^2-16=0 \Leftrightarrow x^2+y^2=16.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O(0;\,0)$ и радиусом 4.

Таким образом, в первом случае получаем дугу ω_1 окружности $x^2+(y-2)^2=4$ с концами в точках O и $A(0;\,4)$, во втором — прямую l, задаваемую уравнением $x=0$, в третьем — дугу ω_2 окружности $x^2+y^2=16$ с концами в точках A и $B(0;\,-4)$ (см. рисунок).

Рассмотрим второе уравнение системы. При каждом значении a оно задаёт прямую m, параллельно прямой $y=x$ или совпадающую с ней.

Прямые m проходят через точки B, O и A при $a=-4$, $a=0$ и $a=4$ соответственно.

При $a=2-2\sqrt{2}$ и $a=4\sqrt{2}$ прямые m касаются дуг ω_1 и ω_2 соответственно.

Таким образом, прямая m пересекает прямую l при любом значении a, имеет одну общую точку с дугой ω_1при $a=2-2\sqrt{2}$ и $0<a\le 4$, имеет две общие точки с дугой ω_1 при $2-2\sqrt{2}<a\le 0$, имеет одну общую точку с дугой ω_2 при $-4\le a<4$ и $a=4\sqrt{2}$, имеет две общие точки с дугой ω_2 при $4\le a<4\sqrt{2}$.

Число решений исходной системы равно числу точек пересечений прямой l и дуг ω_1 и ω_2 с прямой m. Таким образом, исходная система имеет ровно три решения при $a=2-2\sqrt{2}$; $0\le a<4$; $4<a<4\sqrt{2}$.

Ответ: $a=2-2\sqrt{2}$; $0\le a<4$; $4<a<4\sqrt{2}$.

#76 (ДЗ)

$\{8-5\sqrt{2};\,3;\,5\sqrt{2}-2\}$

#77 (ДЗ)

Ответа пока что нет

#79 (ДЗ)

3. Задание 18 № 514388

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x^2-2x|-x^2=|y^2-2y|-y^2, \\ x+y=a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Решение.

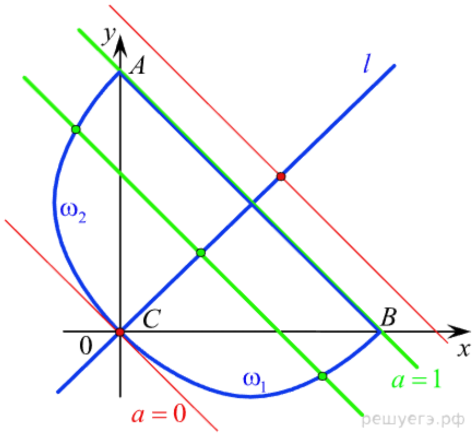
Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.

Рассмотрим четыре случая:

1) Если $x^2-2x\le 0$ и $y^2-2y\le 0$, то получаем уравнение

$$-x^2+2x-x^2=-y^2+2y-y^2 \Leftrightarrow y^2-x^2-y+x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y-x)(x+y-1)=0.$$



Полученное уравнение задаёт пару прямых $y=x$ и $x+y=1$. Случаю удовлетворяют отрезки внутри квадрата 2×2 с вершиной в начале координат.

2) Если $x^2-2x\le 0$ и $y^2-2y\ge 0$, то получаем уравнение

$$-x^2+2x-x^2=y^2-2y-y^2 \Leftrightarrow y=x^2-x.$$

Полученное уравнение задаёт параболу $y=x^2-x$. Случаю удовлетворяет только дуга ниже оси Ox.

3) Если $x^2-2x\ge 0$ и $y^2-2y\le 0$, то получаем уравнение

$$x^2-2x-x^2=-y^2+2y-y^2 \Leftrightarrow x=y^2-y.$$

Полученное уравнение задаёт параболу $x=y^2-y$. Случаю удовлетворяет только дуга левее оси Oy.

4) Если $x^2-2x\ge 0$ и $y^2-2y\ge 0$, то получаем уравнение

$$x^2-2x-x^2=y^2-2y-y^2 \Leftrightarrow y=x.$$

Полученное уравнение задаёт прямую $y=x$. Случаю удовлетворяют лучи вне квадрата 2×2 с вершиной в начале координат.

Точки $A(0;\,1)$, $B(1;\,0)$, $C(0;\,0)$ являются точками пересечения полученных парабол с полученными прямыми и лежат на прямых $x=0$ и/или $y=0$, поэтому искомое множество состоит из прямой l, задаваемой уравнением $y=x$, отрезка AB прямой $x+y=1$, дуги ω_1 параболы $y=x^2-x$ с концами в точках B и C и дуги ω_2 параболы $x=y^2-y$ с концами в точках A и C (см. рис.)

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую m, параллельную прямую AB или совпадающую с ней.

Заметим, что при $a=0$ прямая m касается парабол $x=y^2-y$ и $y=x^2-x$ в точке C.

При $a=1$ прямая m содержит отрезок AB, то есть исходная система имеет бесконечное число решений.

При $a=0$ прямая m касается дуг ω_1 и ω_2 в точке C, пересекает прямую l в точке C и не пересекает отрезок AB, то есть исходная система имеет одно решение.

При $0<a<1$ прямая m не пересекает отрезок AB, пересекает прямую l в точке, отличной от точки C, и пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в одной точке, отличной от точки C, то есть исходная система имеет три решения.

При $a<0$ или $a>1$ прямая m пересекает прямую l в одной точке и не пересекает дуги ω_1 и ω_2 и отрезок AB, то есть исходная система имеет одно решение.

Значит, исходная система имеет более двух решений при $0<a\le 1$.

Ответ: $0<a\le 1$.

Примечание Алексея Лапатина.

Утверждение «при $a=0$ прямая m касается парабол» далеко не очевидно и нуждается в обосновании. Я вижу два варианта его обоснования.

1. Найти касательную к одной из кривых в этой точке и показать, что она совпадает с прямой m. В силу симметрии всего рисунка относительно $y=x$ для второй кривой m так же будет касательной.

2. Можно использовать свойство: касательная к параболе с вертикальной осью симметрии пересекает горизонтальный отрезок, соединяющий вершину и точку на вертикальной прямой, проходящей через точку касания, в его середине. Достаточно показать, что прямая $y=-x$ отвечает этому требованию для обеих парабол.

#81 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\left(x+|y|-2\right)\left(x^2+4x+y^2+2\right)}{x-2}=0, \\ y=\sqrt{a-5}\cdot x \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

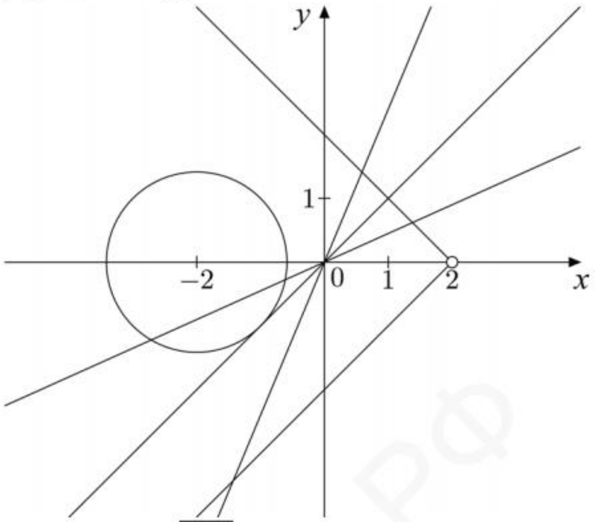
__**Решение.**__

Решим первое уравнение системы:

$$\frac{\left(x+|y|-2\right)\left(x^2+4x+y^2+2\right)}{x-2}=0.$$

Получим $|y|=2-x$ или $(x+2)^2+y^2=2$ при условии $x\neq 2$.

Построим график данного уравнения.



Графиком функции $y=\sqrt{a-5}\cdot x$ является прямая с неотрицательным угловым коэффициентом, равным $\sqrt{a-5}$, определённая при $a\geq 5$.

Возможны четыре случая взаимного расположения данной прямой и графика первого уравнения системы.

1. Прямая $y=\sqrt{a-5}\cdot x$ при $a=5$ пересекает окружность $(x+2)^2+y^2=2$ в двух точках и не имеет общих точек с графиком уравнения $|y|=2-x$. Таким образом, система имеет ровно два решения.

2. Прямая $y=\sqrt{a-5}\cdot x$ при $5<a<6$ пересекает окружность $(x+2)^2+y^2=2$ в двух точках и график уравнения $|y|=2-x$ ещё в одной. В этом случае система имеет три решения.

3. Прямая $y=\sqrt{a-5}\cdot x$ при $a=6$ касается окружности $(x+2)^2+y^2=2$. Уравнение касательной имеет вид $y=x$. С графиком уравнения $|y|=2-x$ данная прямая имеет одну точку пересечения. Таким образом, система имеет ровно два решения.

4. Прямая $y=\sqrt{a-5}\cdot x$ при $a>6$ не имеет общих точек с окружностью $(x+2)^2+y^2=2$. С графиком уравнения $|y|=2-x$ прямая имеет две точки пересечения. Таким образом, система имеет ровно два решения.

Исходная система будет иметь ровно два различных решения при $a=5$ или $a\geq 6$.

Ответ: $a=5$; $a\geq 6$.

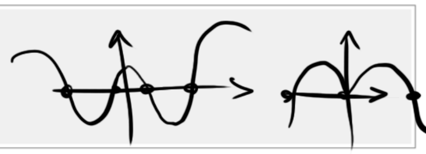
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только исключением точки $a=6$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $(6;+\infty)$, возможно, с исключением граничной точки $a=6$ и исключением точки $a=5$ ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямой и окружности и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

#82 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$x^2 + (a+4)^2 = |x-4-a| + |x+a+4|$

имеет единственный корень.



9B19AF

Источники:
FIPI
osfipi
Ященко 2019 (36 вар)
Семёнов 2015
Основная волна 2013

$x^2 + (a+4)^2 - |x-4-a| - |x+a+4| = 0$

Пусть $f(x) = x^2 + (a+4)^2 - |x-4-a| - |x+a+4|$

$f(-x) = (-x)^2 + (a+4)^2 - |-x-4-a| - |-x+a+4|$
$= x^2 + (a+4)^2 - |x+4+a| - |x-a-4|$

$\Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x)$ – чётная функция

Единственный корень чётная ф-ция может иметь только если этот корень $x=0$

Найдём, при каких a $x=0$ будет являться корнем ур-я

$0^2 + (a+4)^2 = |0-4-a| + |0+a+4|$

$(a+4)^2 = |4+a| + |4+a|$
$|a+4|^2 = 2|a+4|$
$|a+4|^2 - 2|a+4| = 0$
$|a+4| \cdot (|a+4| - 2) = 0$

$|a+4| = 0$
$a = -4$

$|a+4| - 2 = 0$
$|a+4| = 2$
$\left[\begin{array}{l} a+4=2 \\ a+4=-2 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a=-2 \\ a=-6 \end{array}\right.$

Проверим, при каких из этих трёх a будет единственный корень $x=0$

Если $a=-4$, ~~то~~
$x^2 + (\cancel{-4+4})^2 = |x\cancel{-4}\cancel{-(-4)}| + |x\cancel{-4}\cancel{+4}|$
$x^2 = 2|x|$
$|x|^2 - 2|x| = 0$
$|x| \cdot (|x| - 2) = 0$
$|x| = 0$ $\quad |x| = 2$
$x = 0$ $\quad x = \pm 2$

$\Rightarrow$ при $a=-4$ получаем три реш.

Если $a=-6$, то
$x^2 + (-6+4)^2 = |x-4-(-6)| + |x-6+4|$
$x^2 + 4 = |x+2| + |x-2|$
$x=0$ – единств. реш.
$\Rightarrow$ при $a=-6$ получаем единств. корень $x=0$

Если $a=-2$, то
$x^2 + (-2+4)^2 = |x-4-(-2)| + |x-2+4|$
$x^2 + 4 = |x-2| + |x+2|$

		-2		2	
$\lvert x-2\rvert$	$-$		$-$		$+$
$\lvert x+2\rvert$	$-$		$+$		$+$

Если $x < -2$, то $x^2 + 4 = -x + 2 - x - 2$
$x^2 + 2x + 4 = 0$
$(x^2 + 2x + 1) + 3 = 0$
$(x+1)^2 + 3 = 0$
нет реш.

Если $-2 \leq x \leq 2$ $\quad \cancel{x^2}\cancel{+4} = \cancel{-x}\cancel{+2}\cancel{+x}\cancel{+2}$
$x = 0$

Если $x > 2$, то $x^2 + 4 = x - 2 + x + 2$
$x^2 - 2x + 4 = 0$
$(x-1)^2 + 3 = 0$
нет реш.

$\Rightarrow$ при $a=-2$ получаем единств. корень $x=0$

Ответ: $\{-2; -6\}$.

#83 (ДЗ)

1 **Задание 18 № 500431**

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^4+(a-4)^2=|x-a+4|+|x+a-4|$ либо имеет единственное решение, либо не имеет решений.

Решение.

Введём обозначения: $a-4=b,\, f(x)=x^4+b^2,\, g(x)=|x-b|+|x+b|$. В этих обозначениях исходное уравнение принимает вид $f(x)=g(x)$.

Заметим, что $g(x)=2|x|$ при $|x|\geq|b|,\, g(x)=2|b|$ при $|x|<|b|$.

Пусть $|b|\geq 2$ покажем, что в этом случае уравнение $f(x)=g(x)$ либо имеет единственное решение, либо не имеет решений.

Действительно, если $|x|\geq|b|\geq 2$, то $f(x)=x^4+b^2\geq x^4\geq|x|\cdot x^2\cdot|x|\geq 2x^2\cdot|b|>2|x|=g(x)$.

Если $|x|<|b|$, то $f(x)=x^4+b^2\geq b^2\geq 2|b|=g(x)$, причём равенство достигается только при $|b|=2$ и $x=0$.

При $|b|<2$ верны неравенства $f(0)\leq g(0)$ и $f(2)>g(2)$, так как $b^2\leq 2|b|$ и $16+b^2>4$. Значит, уравнение $f(x)=g(x)$ имеет решение.

Если некоторое число x_0 является решением этого уравнения, то и число $-x_0$ также является его решением, поскольку функции $f(x)$ и $g(x)$ — чётные. Значит, если уравнение $f(x)=g(x)$ имеет единственное решение, то это решение $x=0$.

Решим уравнение $f(0)=g(0)$ относительно b: $b^2=2|b|\Leftrightarrow|b|\cdot(|b|-2)=0$, значит, $x=0$ является решением уравнения $f(x)=g(x)$ при $b=0$ или $|b|=2$.

Случай, когда $|b|=2$, уже был разобран.

При $b=0$ уравнение принимает вид $x^4=2|x|$ и имеет три различных решения: $x=-\sqrt[3]{2},\, x=0,\, x=\sqrt[3]{2}$.

Таким образом, уравнение $f(x)=g(x)$ имеет единственное решение или не имеет решений при $b\leq-2$ и $b\geq 2$, то есть при $a\leq 2$ и $a\geq 6$.

Ответ: $a\in(-\infty,\,2]\cup[6,\,+\infty)$.

Аналоги к заданию № 500411: 500431 Все

Раздел кодификатора ФИПИ/Решу ЕГЭ: Симметрия в решениях

#85 (ДЗ)

Ответа пока что нет

#87 (ДЗ)

Ответа пока что нет

#89 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} y=(a+2)x^2-(2a+1)x+a-3, \\ x=(a+2)y^2-(2a+1)y+a-3 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Решение.

Система не изменится, если поменять x и y местами. Следовательно, система имеет единственное решение, только если $x=y$. Получаем уравнение:

$$(a+2)x^2-(2a+2)x+a-3=0.$$

Это уравнение должно иметь единственный корень.

Если $a\neq-2$, то дискриминант должен равняться нулю:

$$(2a+2)^2-4(a+2)(a-3)=0;$$
$$3a+7=0,$$

откуда $a=-\frac{7}{3}$.

При $a=-\frac{7}{3}$ получаем $x^2-8x+16=0$, откуда $x=4$. Тогда решением системы является пара $(4;4)$.

Если $a=-2$, получается линейное уравнение $2x-5=0$, которое имеет единственное решение $x=2{,}5$. Решением системы является пара $(2{,}5;2{,}5)$.

Покажем, что в этих случаях нет иных решений, где $x\neq y$. Вычтем второе уравнение системы из первого и разделим полученное уравнение почленно на $x-y\neq0$:

$$-1=(a+2)(x+y)-(2a+1).$$

При $a=-2$ получается, что $a=0$. Решений нет.

При $a=-\frac{7}{3}$ получаем $y=14-x$. Подставим это выражение в первое уравнение системы:

$$14-x=-\frac{1}{3}x^2+\frac{11}{3}x-\frac{16}{3};\quad x^2-14x+58=0.$$

Полученное уравнение не имеет корней.

Ответ: $-\frac{7}{3}$; -2

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Присутствуют все шаги решения, получены верные значения параметра, но отсутствует доказательство того, что при каждом из них система имеет единственное решение	3
С помощью верного рассуждения получено только одно значение a	2
С помощью верного рассуждения задача сведена к исследованию квадратного уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

#90 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых функция

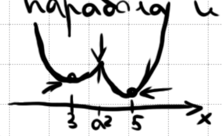
$$f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 8x$$

имеет более двух точек экстремума.

Источники:
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018 (36 вар)
Сергеев 2018

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 10x + 2a^2 \quad (x_0 = 5) & \text{при } x \geq a^2 \\ x^2 - 6x - 2a^2 \quad (x_0 = 3) & \text{при } x < a^2 \end{cases}$$

В $x = a^2$ будет излом, т.е. в $x = a^2$ заканчивается одна парабола и начинается другая



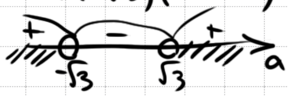
Если $3 < a^2 < 5$, то будет 3 точки экстрем.
Если $a^2 \leq 3$ или $a^2 \geq 5$, то будет 1 точка экстр.

=> Нужно решить $3 < a^2 < 5$

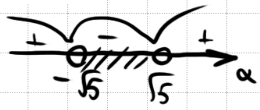
$$\begin{cases} a^2 - 3 > 0 & (1) \\ a^2 - 5 < 0 & (2) \end{cases}$$

① $a^2 - \sqrt{3}^2 > 0$

$(a - \sqrt{3})(a + \sqrt{3}) > 0$



②



Найдём пересечение:

Ответ: $(-\sqrt{5}; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \sqrt{5})$.

#91 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых функция

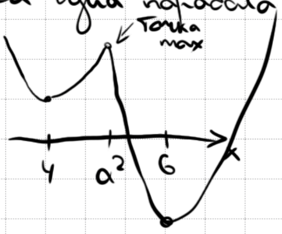
$$f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 10x$$

имеет хотя бы одну точку максимума.

Источники:
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018 (36 вар)
Сергеев 2018

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 12x + 2a^2 \quad (x_0 = 6) & \text{при } x \geq a^2 \\ x^2 - 8x - 2a^2 \quad (x_0 = 4) & \text{при } x < a^2 \end{cases}$$

В $x = a^2$ будет излом, т.е. в $x = a^2$ заканчивается одна парабола и начинается другая

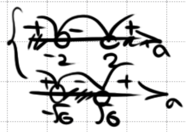


Если $4 < a^2 < 6$, то будет ровно 1 точка максимума (в изломе)

Если $\left[\begin{array}{l} a^2 \leq 4 \\ a^2 \geq 6 \end{array}\right.$, то не будет точек максимума.

=> Нужно решить $4 < a^2 < 6$

$$\begin{cases} a^2 > 4 \\ a^2 < 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 - 2^2 > 0 \\ a^2 - \sqrt{6}^2 < 0 \end{cases}$$



Найдём пересечение:

Ответ: $(-\sqrt{6}; -2) \cup (2; \sqrt{6})$.

#93 (ДЗ)

Досрочный ЕГЭ (Апрель)

Найдите все значения а, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x)=4x^2+4ax+a^2-2a+2$$

на множестве 1<=|x|<=3 не меньше 6.

Свернуть

Решение.

Графиком функции $f(x)=(2x+a)^2-2a+2$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина имеет координаты $\left(-\frac{a}{2};-2a+2\right)$. Значит, минимум функции $f(x)$ на всей числовой оси достигается при $x=-\frac{a}{2}$.

На множестве $1\le|x|\le3$ эта функция достигает наименьшего значения либо в точке $x=-\frac{a}{2}$, если эта точка принадлежит множеству, либо в одной из граничных точек $x=\pm1$, $x=\pm3$.

Если наименьшее значение функции не меньше 6, то и всякое значение функции не меньше 6. В частности,

$$f(1)\ge6;\ a^2+2a+6\ge6;\ a(a+2)\ge0,$$
$$f(-1)\ge6;\ a^2-6a+6\ge6;\ a(a-6)\ge0,$$

откуда получаем систему неравенств

$$\begin{cases}a(a+2)\ge0,\\ a(a-6)\ge0,\end{cases}$$

решениями которой являются $a\le-2$; $a=0$; $a\ge6$.

При $a\le-2$ имеем: $-\frac{a}{2}\ge1$ и $f\left(-\frac{a}{2}\right)=-2a+2\ge6$. Значит, наименьшее значение функции на всей числовой оси не менее 6, и условие задачи выполнено.

При $a=0$ имеем: $-\frac{a}{2}=0$, значит, наименьшее значение функции достигается в одной из граничных точек $x=\pm1$, в которых значение функции не меньше 6.

При $a\ge6$ имеем: $-\frac{a}{2}\le-3$, значит, поскольку на промежутке $\left(-\frac{a}{2};+\infty\right)$ функция возрастает, наименьшее значение функции достигается в точке $x=-3$ и $f(-3)=a^2-14a+38$.

$$a^2-14a+38\ge6;\ a^2-14a+32\ge0,$$

откуда, учитывая условие $a\ge6$, находим: $a\ge7+\sqrt{17}$.

Ответ: $a\le-2$; $a=0$; $a\ge7+\sqrt{17}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений *a*, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений *a*	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений *a*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

#94 (ДЗ)

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = |x^2 + 2x - 3| + 4|x - a|$$

не больше 3.

Источники:
Досрочная волна 2019
Пробный ЕГЭ 2016
Досрочная волна 2016

Рассмотрим неравенство: $|x^2+2x-3|+4\cdot|x-a| \leq 3$

Если хотя бы в одной точке значение $f(x) \leq 3$, то наименьшее значение функции ≤ 3

$\Rightarrow$ Надо найти все a, при которых есть хотя бы одно решение неравенства

$$|x^2+2x-3|+4|x-a| \leq 3$$
$$|x^2+2x-3| \leq 3-4\cdot|x-a|$$

Решим графически:

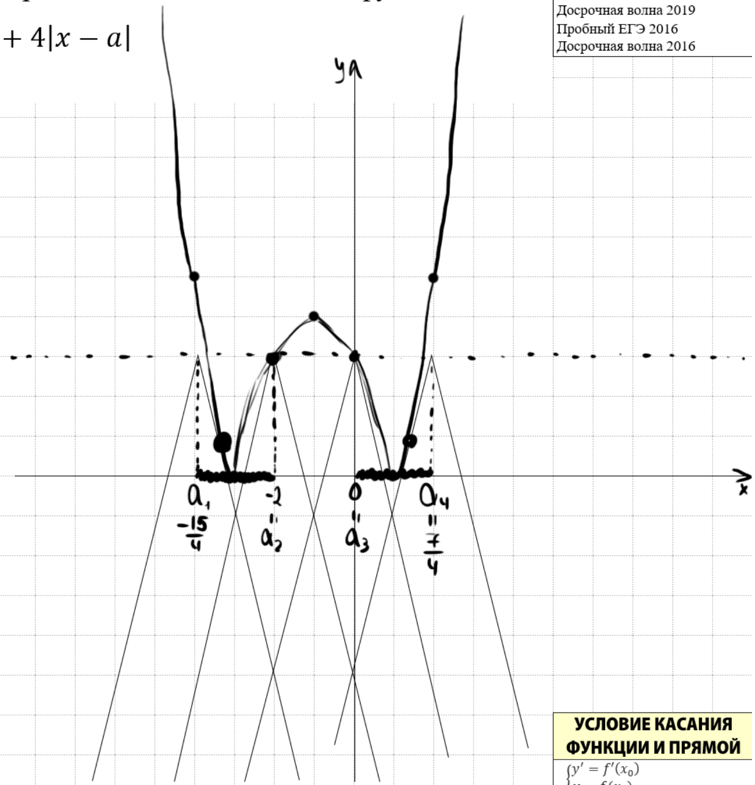
Построим $|x^2+2x-3|$

Если $y=0$, то $|x^2+2x-3|=0$

$x^2+2x-3=0$

$x=-3 \quad x=1$

$x_в=-1$



УСЛОВИЕ КАСАНИЯ ФУНКЦИИ И ПРЯМОЙ

$$\begin{cases} y' = f'(x_0) \\ y = f(x_0) \end{cases}$$

ПРОИЗВОДНЫЕ

1	$C' = 0$
2	$x' = 1$
3	$(Cx)' = C$
4	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
5	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6	$(U \cdot V)' = U'V + UV'$
7	$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$
8	$(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$
9	$(\sin x)' = \cos x$
10	$(\cos x)' = -\sin x$
11	$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
12	$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13	$(e^x)' = e^x$
14	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
15	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
16	$(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$

Найдём a_1:

$y = 3-4\cdot|x-a|$

$y = 3-4x+4a$ касается парабола $y=x^2+2x-3$

Условие касания:

$$\begin{cases} ① \ (3-4x+4a)' = (x^2+2x-3)' \\ ② \ 3-4x+4a = x^2+2x-3 \end{cases}$$

① $-4 = 2x+2$

$-6 = 2\cdot x$

$x=-3$

② Подставим

$3-4\cdot(-3)+4a = (-3)^2+2\cdot(-3)-3$

$3+12+4a = 9-6-3$

$4a=-15$

$a_1 = -\frac{15}{4}$

Найдём a_4:

$y = 3-4\cdot|x-a|$

$y = 3-4\cdot(-x+a) = 3+4x-4a$

касается парабола $y=x^2+2x-3$

$$\begin{cases} ③ \ (3+4x-4a)' = (x^2+2x-3)' \\ ④ \ 3+4x-4a = x^2+2x-3 \end{cases}$$

③ $4 = 2x+2$

$2 = 2\cdot x$

$x=1$

④ Подставим

$3+4\cdot 1-4a = 1^2+2\cdot 1-3$

$7-1-2+3 = 4a$

$7=4\cdot a$

$a=\frac{7}{4}$

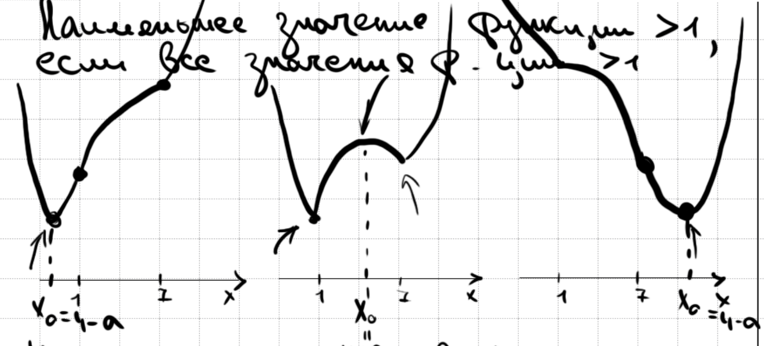
Ответ: $\left[-\frac{15}{4}; -2\right] \cup \left[0; \frac{7}{4}\right]$

#95 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 7|$ больше 1.

Источники:
Ященко 2018 (10 вар)
Ященко 2018 (30 вар)
Демо 2014
Демо 2013
Демо 2012

Наименьшее значение функции >1, если все значения ф-ции >1



У такой функции (квадратичной с модулем) график состоит из кусочков парабол $\Rightarrow$ наименьшее значение функции либо в вершинах парабол, либо в точках излома из-за модуля

Раскроем модуль 2 способами:

$f(x) = x^2 + (2a-8)\cdot x + 7$ при $x \left[\begin{matrix} x\le 1 \\ x \ge 7\end{matrix}\right.$ $\quad x_0 = 4-a$

$f(x) = -x^2 + (2a+8)\cdot x - 7$ при $1 < x < 7$ $\quad x_0 = 4+a$

$\Rightarrow$ Наименьшее значение $f(x)$ принимает в $x=1$ или $x=7$ или $x=4-a$

Получаем $f(1)$, $f(7)$, $f(4-a)$

Какое из трёх значений наименьшее — не известно

$$\left\{\begin{array}{l} ①\ f(1) > 1 \\ ②\ f(7) > 1 \\ ③\ f(4-a) > 1 \end{array}\right.$$

① $2a\cdot > 1$, $a > \frac{1}{2}$

② $2a\cdot 7 > 1$, $a > \frac{1}{14}$

③ $2a\cdot(4-a) + |(4-a)^2 - 8\cdot(4-a) + 7| > 1$

$8a - 2a^2 + |16 - \cancel{8a} + a^2 - 32 + \cancel{8a} + 7| - 1 > 0$

$|a^2 - 9| > 2a^2 - 8a + 1$

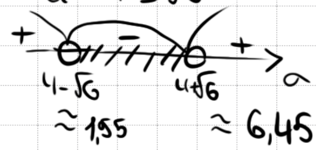
$$\left[\begin{array}{l} ④\ a^2 - 9 > 2a^2 - 8a + 1 \\ ⑤\ a^2 - 9 < -2a^2 + 8a - 1 \end{array}\right.$$

④ $a^2 - 8a + 10 < 0$

$D = 64 - 40 = 24 = (2\sqrt{6})^2$

$a = \frac{8 \pm 2\sqrt{6}}{2}$

$a = 4 \pm \sqrt{6}$

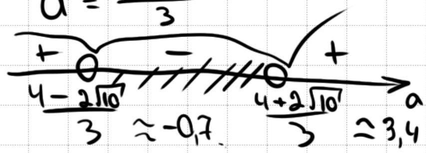


⑤ $3a^2 - 8a - 8 < 0$

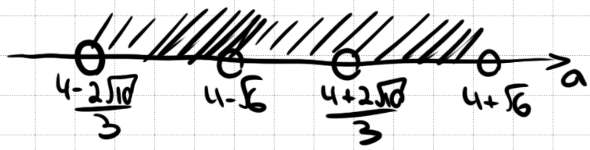
$D = 64 + 96 = 160 = (4\sqrt{10})^2$

$a = \frac{8 \pm 4\sqrt{10}}{6}$

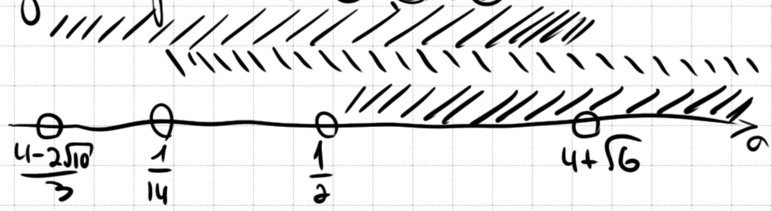
$a = \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{3}$



Объединим ④ и ⑤



Найдём пересечение ①, ② и ③



Ответ: $\left(\frac{1}{2} ; 4 + \sqrt{6}\right)$.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = x - 2|x| + |x^2 - (2a+1)x + a^2 + a|$$

больше -4?

Источники:
Досрочная волна 2019

Наименьшее значение функции > -4, если все значения > -4

Найдём все a, при которых неравенство
$x - 2|x| + |x^2 - (2a+1)\cdot x + a^2 + a| > -4$
выполняется при всех значениях x

$|x^2 - (2a+1)\cdot x + a^2 + a| > 2|x| - x - 4$

Решим графически:

Построим $y = 2|x| - x - 4$

x	-4	0	4
y	8	-4	0

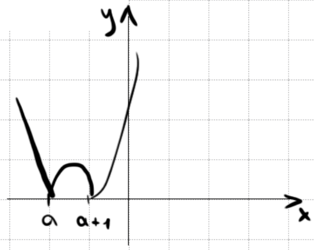
Найдём нули модуля:

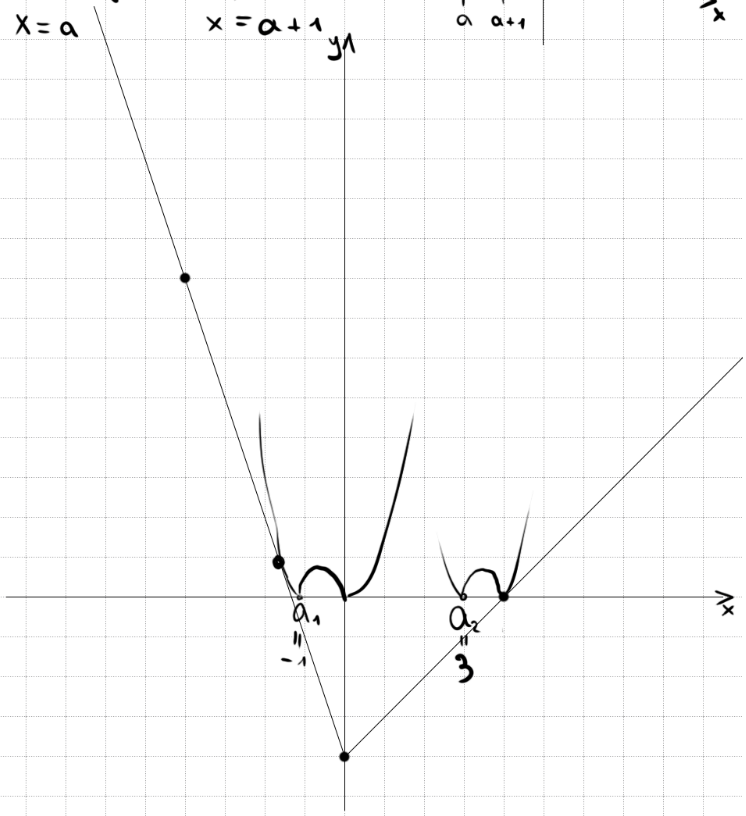
$x^2 - 2ax - x + a^2 + a = 0$

$(x-a)^2 - (x-a) = 0$

$(x-a)\cdot(x-a-1) = 0$

$x = a \qquad x = a+1$





Найдём a_1:

$y = 2|x| - x - 4$

$y = -2x - x - 4 = -3x - 4$ касается параболы $y = x^2 - (2a+1)\cdot x + a^2 + a$

Условие касания:

$$\begin{cases} (-3x-4)' = (x^2 - (2a+1)\cdot x + a^2 + a)' & (1) \\ -3x - 4 = x^2 - 2ax - x + a^2 + a & (2) \end{cases}$$

(1) $-3 = 2x - 2a - 1$

$2x = 2a - 2$

$x = a - 1$

(2) Подставим

$-3\cdot(a-1) - 4 = (a-1)^2 - 2a\cdot(a-1) - (a-1) + a^2 + a$

$-3a + 3 - 4 = \cancel{a^2} - \cancel{2a} + 1 - \cancel{2a^2} + \cancel{2a} - \cancel{a} + 1 + \cancel{a^2} + \cancel{a}$

$-3a = 3$

$a = -1$

Ответ: $(-1; 3)$.

#97 (ДЗ)

6. Задание 18 № 525245

Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции

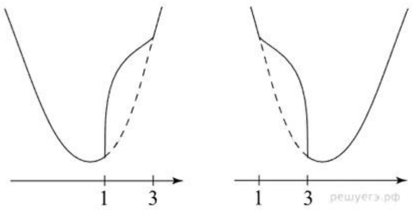
$$f(x) = ax - a - 1 + |x^2 - 4x + 3|$$

меньше -2.

Решение.

При $x \le 1$ или $x \ge 3$ модуль раскрывается «со знаком плюс»: $f(x) = x^2 + (a-4)x - a + 2$. График функции на этих лучах представляет собой параболу, ветви которой направлены вверх.

При $1 \le x \le 3$ модуль раскрывается "со знаком минус»: $f(x) = -x^2 + (a+4)x - a - 4$. На отрезке [1; 3] график функции представляет собой параболу, ветви которой направлены вниз.



Вершина параболы может лежать левее отрезка [1; 3], правее этого отрезка или на самом отрезке. Рассмотрим эти случаи.

Если $x_{\text{в}} \ge 3$ и $x_{\text{в}} \le 1$, то есть, если

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{a+4}{2} \ge 3, \\ \dfrac{a+4}{2} \le 1, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+4 \ge 6, \\ a+4 \le 2, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \le -2, \\ a \ge 2, \end{array}\right.$$

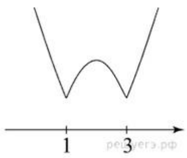
то наименьшее значение функции достигается в вершине, абсцисса которой $\dfrac{4-a}{2}$. Оно равно:

$$\left(\frac{4-a}{2}\right)^2 + (a-4)\left(\frac{4-a}{2}\right) - a + 2 = \frac{(4-a)^2}{4} - \frac{(4-a)^2}{2} - a + 2 = -\frac{(4-a)^2}{4} - a + 2 =$$
$$= -\frac{16 - 8a + a^2}{4} - a + 2 = -2 + a - \frac{a^2}{4}.$$

По условию требуется, чтобы наименьшее значение было меньше -2:

$$-2 + a - \frac{a^2}{4} < -2 \Leftrightarrow a - \frac{a^2}{4} < 0 \Leftrightarrow a^2 - 4a > 0 \Leftrightarrow a(a-4) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > 4, \\ a < 0. \end{array}\right.$$

С учетом того, что $a \in (-\infty;\ -2) \cup (2,\ +\infty)$, получаем: $a \in (-\infty;\ -2) \cup (4,\ +\infty)$.



Осталось рассмотреть случай, когда вершина параболы, ветви которой направлены вверх, лежит на отрезке [1; 3]. В этом случае параметр $a \in [-2;\ 2]$, а наименьшее значение функции достигается на концах отрезка. Найдем $f(1) = -1$, и $f(3) = 2a - 1$. Наименьшее значение функции может быть меньше -2 только если $2a - 1 < -2$, то есть при $a < -\dfrac{1}{2}$. Учитывая ограничения на a, получаем: $-2 \le a < -\dfrac{1}{2}$.

Объединяя найденные значения параметра, получаем ответ: $a \in \left(-\infty;\ -\dfrac{1}{2}\right) \cup (4;\ +\infty)$.

Приведем другое решение.

Для того, чтобы наименьшее значение функции $f(x) = ax - a - 1 + |x^2 - 4x + 3|$ было меньше -2, необходимо и достаточно, чтобы неравенство $ax - a - 1 + |x^2 - 4x + 3| < -2$ имело решение. Запишем его в виде

$$|x^2 - 4x + 3| < -a(x-1) - 1$$

и построим графики левой и правой частей неравенства.

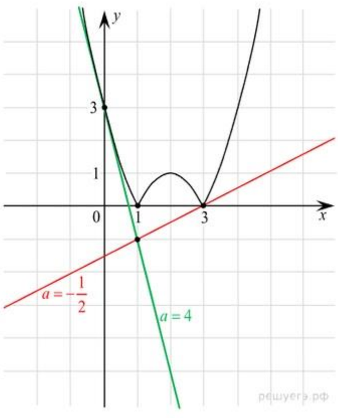


График левой части неравенства — парабола (см. рис.), пересекающая ось абсцисс в точках 1 и 3, с отражённой относительно оси абсцисс отрицательной частью. График правой части неравенства — пучок прямых, проходящих через точку (1; −1).

Нетрудно заметить, что неравенство имеет решения, когда графики имеют более одной точки пересечения. То есть когда прямая проходит выше точки (3; 0) или выше точки касания с параболой на луче (−∞; 1].

В первом случае угловой коэффициент $-a$ прямой $y = -a(x-1) - 1$ должен быть больше углового коэффициента прямой, проходящей через точку (3; 0). Имеем: $-a(3-1) - 1 > 0 \Leftrightarrow a < -\dfrac{1}{2}$.

Во втором случае запишем уравнение $-a(x-1) - 1 = x^2 - 4x + 3$ в виде $x^2 + (a-4)x - a + 4 = 0$ и найдем дискриминант полученного квадратного уравнения: $D = (a-4)^2 + 4(a-4) = (a-4)a$. Парабола имеет с касательной единственную общую точку, поэтому касанию соответствует дискриминант, равный нулю, откуда $a = 0$ или $a = 4$. Подходит только положительный корень, соответствующий отрицательному угловому коэффициенту прямой.

Таким образом, получаем ответ: $a \in \left(-\infty;\ -\dfrac{1}{2}\right) \cup (4;\ +\infty)$.

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup (4; +\infty)$.

Примечание Льва Бреслава (Санкт-Петербург).

Во втором решении, вообще говоря, переход к равносильной формулировке недостаточно обоснован. Например, для внешне очень похожей функции $g(x) = ax^2 - a - 1 + |x^2 - 4x + 3|$ аналогичная переформулировка не будет равносильна изначальной задаче. Поэтому хорошо было бы пояснить, почему наименьшее значение достигается: сослаться на то, что функция непрерывна, и на бесконечностях стремится к плюс бесконечности.

Примечание редакции Решу ЕГЭ.

Соглашаясь с предыдущим замечанием, отметим, что снижать оценку за отсутствие указанного обоснования неправильно. Смоленская комиссия ЕГЭ в 2019 году оценила второе решение одним баллом из четырёх, объяснив на апелляции, что решающий должен явно показать, что рассматриваемая им функция достигает наименьшего значения. Работа была перепроверена Рособрнадзором, принявшим решение о выставлении полного балла. Подробности этой истории подробно описаны Дмитрием Гущиным здесь.

#98 (ДЗ)

18 Найдите, при каких неположительных значениях a функция $f(x)=ax^4+4x^3-3x^2-5$ на отрезке $[-2;\ 2]$ имеет две точки максимума.

$$\left(-1{,}5;\ -\frac{9}{8}\right]$$

#99 (ДЗ)

1 **Задание 18 № 515691**

Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение

$$64x^6+4x^2=(3x+a)^3+3x+a$$

не имеет корней.

Решение.

Заметим, что исходное уравнение можно записать в виде

$$(4x^2)^3+(4x^2)=(3x+a)^3+(3x+a)$$

Рассмотрим функцию $y(t)=t^3+t$. Её производная $y'(t)=3t^2+1>0$, значит, функция $y(t)$ является возрастающей и каждое свое значение принимает ровно один раз. Тогда исходное уравнение равносильно квадратному уравнению $4x^2=3x+a$ или $4x^2-3x-a=0$, которое не имеет корней при $D=9+16a<0$, то есть при $a<-\frac{9}{16}$.

Ответ: $\left(-\infty;\ -\frac{9}{16}\right)$.

Аналоги к заданию № 512996: 513262 513265 515672 515691 Все

Источник: Типовые тестовые задания по математике, под редакцией И. В. Ященко 2017. Вариант 3. (Часть С).

Раздел кодификатора ФИПИ/Решу ЕГЭ: Использование симметрий, оценок, монотонности

#100 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, для каждого из которых уравнение

$$8x^6+(a-|x|)^3+2x^2-|x|+a=0$$

имеет более трёх различных решений.

$$0<a<\frac{1}{8}$$

#101 (ДЗ)

5. Задание 18 № 510876

Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\sin^{14} x + (a - 3\sin x)^7 + \sin^2 x + a = 3\sin x$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение.

Запишем уравнение в виде:

$$\sin^{14} x + \sin^2 x = (3\sin x - a)^7 + (3\sin x - a).$$

Рассмотрим функцию $f(t) = t^7 + t$. Она является суммой двух возрастающих функций и поэтому возрастает. Исходное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда $f(\sin^2 x) = f(3\sin x - a)$, откуда получаем

$$\sin^2 x = 3\sin x - a \Leftrightarrow a = 3\sin x - \sin^2 x.$$

Функция $y = \sin x$ принимает значения от -1 до 1, а функция $z = 3y - y^2$ монотонно возрастает на отрезке $[-1, 1]$ и принимает на нём значения от 4 до 2. Значит, уравнение $a = 3\sin x - \sin^2 x$, а с ним и исходное уравнение имеют решение при $-4 \le a \le 2$.

Ответ: $[-4, 2]$.

Дублирует задание 505432.

#102 (ДЗ)

18	$a = \pm\dfrac{\sqrt{26}}{4}$

18. **Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение**

$$\left(2x^2 + x + 3a^2 + 5\right)^2 = 12a^2\left(2x^2 + x + 5\right)$$

имеет ровно один корень.

#103 (ДЗ)

5.3.1. 5.

5.3.1. Найдите все значениях параметра a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения $x^2 - 15x - 14 + a^2 - 10a = 0$ принимает наибольшее значение.

#104 (ДЗ)

1

Задание 18 № 524026

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(ax-x^2)+\frac{1}{ax-x^2}+2=0$$

имеет ровно два различных корня на промежутке (-2; 2].

Решение.

Сделаем замену $y=ax-x^2$. Получаем:

$$y+\frac{1}{y}+2=0\Leftrightarrow\frac{y^2+2y+1}{y}=0\Leftrightarrow\frac{(y+1)^2}{y}=0\Leftrightarrow y=-1.$$

Следовательно, $x^2-ax-1=0$. Дискриминант этого уравнения равен $a^2+4>0$, поэтому оно при всех значениях a имеет ровно два различных корня. Положим $f(x)=x^2-ax-1$. Так как $f(0)=-1<0$, оба корня уравнения $f(x)=0$ принадлежат промежутку $(-2;\ 2]$ тогда и только тогда, когда $f(-2)>0$ и $f(2)\geq 0$, то есть когда $4+2a-1>0$ и $4-2a-1\geq 0$. Значит, уравнение $(ax-x^2)+\dfrac{1}{ax-x^2}+2=0$ имеет ровно два различных корня на промежутке $[-2;\ 2)$ при $-1{,}5<a\leq 1{,}5$.

Ответ: $-1{,}5<a\leq 1{,}5$.

Аналоги к заданию № 523999: 524026 Все

Спрятать решение · Прототип задания · В избранное (6) · Поделиться · Сообщить об ошибке · Помощь

#106 (ДЗ)

18	$\frac{4-2\sqrt{13}}{9}<a<0;0<a<\frac{2\sqrt{13}+4}{9}$

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax^2+2(a-1)x+(a-4)=0$$

имеет два корня, расстояние между которыми больше 3.

#109 (ДЗ)

1. Задание 18 № 514126

Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\left((a-2)x^2+6x\right)^2-4\left((a-2)x^2+6x\right)+4-a^2=0$$

имеет ровно два решения.

Решение.

Пусть $t=(a-2)x^2+6x$, тогда уравнение запишется в виде $t^2-4t+4-a^2=0$, откуда $t=a+2$ или $t=2-a$. Значит, решения исходного уравнения — это решения одного из уравнений $(a-2)x^2+6x=a+2$ или $(a-2)x^2+6x=2-a$.

Исследуем, сколько решений имеет уравнение $(a-2)x^2+6x=b$ в зависимости от a и b. При $a\neq 2$ уравнение принимает вид $(a-2)x^2+6x-b=0$. Это квадратное уравнение, дискриминант которого равен $36+4(a-2)b$. Таким образом, уравнение $(a-2)x^2+6x=b$ имеет два решения при $(a-2)b>-9$, одно решение при $(a-2)b=-9$ и не имеет решений при $(a-2)b<-9$. При $a=2$ уравнение принимает вид $6x=b$ и имеет одно решение.

Уравнение $(a-2)x^2+6x=a+2$ и $(a-2)x^2+6x=2-a$ совпадают при $a+2=2-a$, то есть при $a=0$. В этом случае мы получаем единственное уравнение $-2x^2+6x=2$, которое имеет два решения.

При других значениях a исходное уравнения имеет ровно два решения, если либо оба уравнения $(a-2)x^2+6x=a+2$ и $(a-2)x^2+6x=2-a$ имеют по одному решению, либо одно из них не имеет решений, а другое имеет два решение. При $a=2$ каждое из этих уравнений имеет единственное решение и эти решения различны. При других значениях a выполнено неравенство $a^2-4>-9$, поэтому уравнение $(a-2)x^2+6x=a+2$ имеет два решения. А значит, уравнение $(a-2)x^2+6x=2-a$ не должно иметь решений. Это выполнено при $(a-2)^2>9$, то есть при $a<-1$ и при $a>5$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два решения при $a<-1$, $a=0$, $a=2$, $a>5$.

Ответ: $(-\infty;\ -1)\cup\{0,\ 2\}\cup(5;\ +\infty)$.

#110 (ДЗ)

18 #18.16

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^3 + 4x^2 - ax + 6 = 0$$

имеет единственный корень на отрезке $[-2; 2]$.

Источники:
СтатГрад 2017
СтатГрад 2019

$\left(\frac{6}{x}\right)' = (6 \cdot x^{-1})' = 6 \cdot x^{-2} = -6 \cdot \frac{1}{x^2}$

Заметим, что $x=0$ не является решением уравнения

$\Rightarrow$ Разделим на x

$x^2 + 4x - a + \frac{6}{x} = 0$

$\boxed{a = x^2 + 4x + \frac{6}{x}}$

Рассмотрим $f(x) = x^2 + 4x + \frac{6}{x}$

$f'(x) = 2x + 4 - \frac{6}{x^2} = 0$

$\frac{2x^3 + 4x^2 - 6}{x^2} = 0 \quad | :2$

$x^3 + 2x^2 - 3 = 0$

Заметим, что $x = 1$ является корнем уравнения

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 - 3 & x-1 \\ \underline{-\,x^3 - x^2} & \overline{x^2+3x+3} \\ 3x^2 - 3 & \\ \underline{-\,3x^2 - 3x} & \\ 3x - 3 + 0 & \\ \underline{-\,3x - 3} & \\ 0 & \end{array}$$

$(x^2 + 3x + 3)(x - 1) = 0$

$x - 1 = 0$

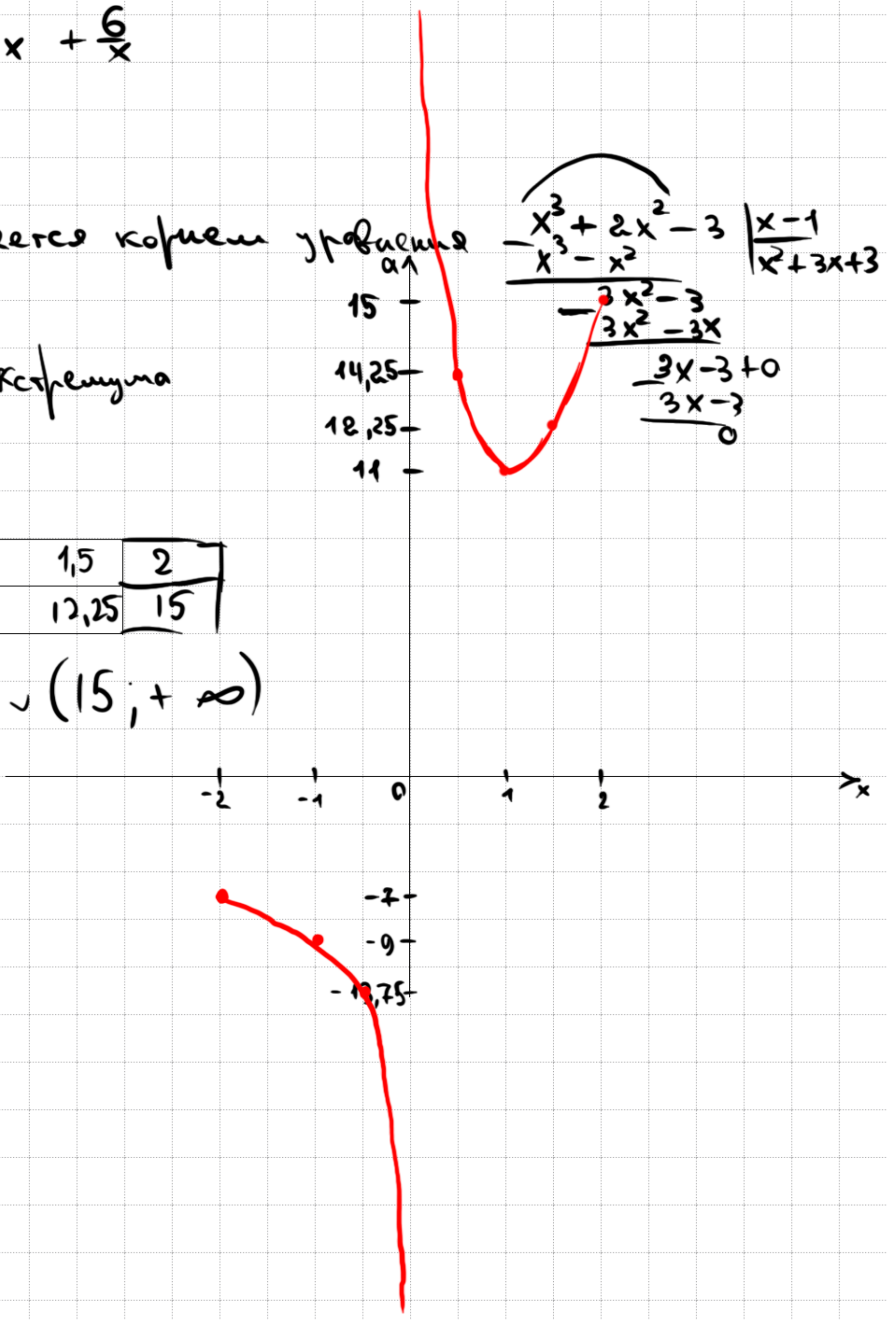
$x = 1$ – точка экстремума

$f'(x)$: -2, $-$, 0, 1, $+$, 2, x

$f(x)$: $\searrow$ min $\nearrow$

x	-2	-1	$-0{,}5$	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
a	-7	-9	$-13{,}75$	$14{,}25$	11	$12{,}25$	15

Ответ: $(-\infty; -7] \cup \{11\} \cup (15; +\infty)$



#111 (ДЗ)

18 Найдите все значения параметра b, при каждом из которых уравнение

$$x^3 + 4x^2 - x\log_2(b-3) + 6 = 0$$

имеет единственное решение на отрезке $[-2; 2]$.

Источники:
Семёнов 2018
Досрочная волна 2016

Пусть $\log_2(b-3) = a$

$x^3 + 4x^2 - x \cdot a + 6 = 0 \quad |:x$

Заметим, что $x=0$ не является решением уравнения ни при каком a

$x^2 + 4x - a + \frac{6}{x} = 0$

$x^2 + 4x + \frac{6}{x} = a$

Решим графически:

Пусть $f(x) = x^2 + 4x + \frac{6}{x}$

Исследуем функцию на монотонность

$f'(x) = 2x + 4 - 6 \cdot x^{-2}$

$\frac{2}{1}x^{(x^2)} + \frac{4}{1}^{(x^2)} - \frac{6}{x^2} = 0$

$\frac{2x^3 + 4x^2 - 6}{x^2} = 0 \quad |:2$

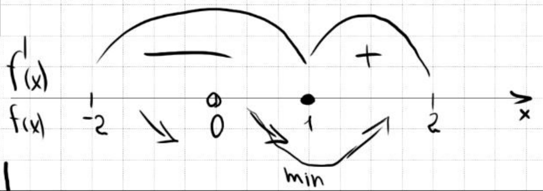
$\frac{x^3 + 2x^2 - 3}{x^2} = 0$

Заметим, что при подстановке $x=1$ числитель обращается в ноль

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2-3 & x-1 \\ \underline{x^3 - x^2} & x^2+3x+3 \\ \quad 3x^2 - 3 & \\ \quad \underline{3x^2 - 3x} & \\ \qquad 3x - 3 & \\ \qquad \underline{3x - 3} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow \frac{(x-1)\cdot(x^2+3x+3)}{x^2} = 0$

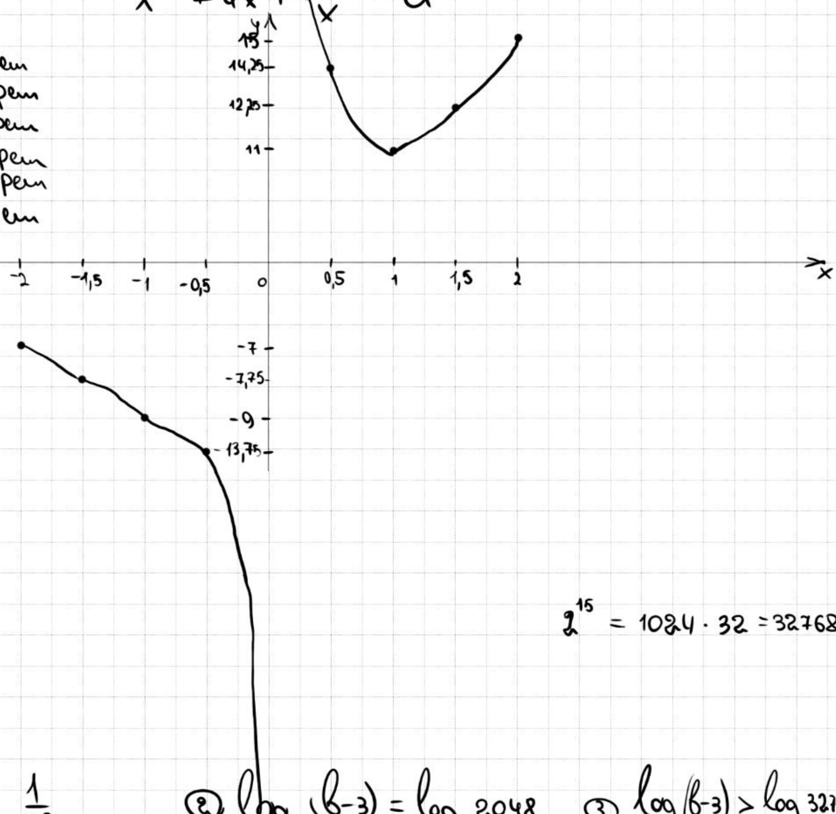
$x = 1$ – точка экстремума



x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
y	-7	$-7{,}75$	-9	$-13{,}75$	$14{,}25$	11	$12{,}25$	15

$x^2 + 4x + \frac{6}{x} = a$

при
- $a < -7$ — 1 реш
- $a = -7$ — 1 реш
- $a = 11$ — 1 реш
- $11 < a < 15$ — 2 реш
- $a = 15$ — 2 реш
- $a > 15$ — 1 реш



Единственное решение будет при таких a:

$$\left[\begin{array}{l} a \le -7 \\ a = 11 \\ a > 15 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} ① & \log_2(b-3) \le -7 \\ ② & \log_2(b-3) = 11 \\ ③ & \log_2(b-3) > 15 \end{array}\right.$$

$2^{15} = 1024 \cdot 32 = 32768$

① $\log_2(b-3) \le \log_2 \frac{1}{128}$

$\begin{cases} b - 3 \le \frac{1}{128} \\ b - 3 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} b \le \frac{385}{128} \\ b > 3 \end{cases}$

$3 \quad \frac{385}{128} \quad b$

② $\log_2(b-3) = \log_2 2048$

$b - 3 = 2048$

$b = 2051$

③ $\log_2(b-3) > \log_2 32768$

$b - 3 > 32768$

$b > 32771$

Объединим.

Ответ: $\left(3; \frac{385}{128}\right] \cup \{2051\} \cup (32771; +\infty)$.

#112 (ДЗ)

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество значений функции $y=\dfrac{3x+3-2ax}{x^2+2(2a+1)x+4a^2+4a+2}$ содержит отрезок $[0;\,1]$.

Решение.

Запишем функцию в виде $y=\dfrac{3+(3-2a)x}{(x+2a+1)^2+1}$.

Отрезок $[0;\,1]$ содержится в множестве значений данной функции тогда и только тогда, когда уравнения $\dfrac{3+(3-2a)x}{(x+2a+1)^2+1}=0$ и $\dfrac{3+(3-2a)x}{(x+2a+1)^2+1}=1$ имеют решения.

Решим первое уравнение. Уравнение $(2a-3)x=3$ имеет решение при любом $a\neq 1{,}5$.

Решим второе уравнение. Уравнение $x^2+(6a-1)x+4a^2+4a-1=0$ имеет решение тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен.

$$D=(6a-1)^2-4\left(4a^2+4a-1\right)\geq 0;\quad 20a^2-28a+5\geq 0;$$

$$\left(a-\frac{7-2\sqrt{6}}{10}\right)\left(a-\frac{7+2\sqrt{6}}{10}\right)\geq 0,$$

откуда $a\in\left(-\infty;\,\dfrac{7-2\sqrt{6}}{10}\right]$ или $a\in\left[\dfrac{7+2\sqrt{6}}{10};\,+\infty\right)$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют значения $a\in\left(-\infty;\,\dfrac{7-2\sqrt{6}}{10}\right]\cup\left[\dfrac{7+2\sqrt{6}}{10};\,1{,}5\right)\cup(1{,}5;\,+\infty)$.

Ответ: $\left(-\infty;\,\dfrac{7-2\sqrt{6}}{10}\right];\ \left[\dfrac{7+2\sqrt{6}}{10};\,1{,}5\right);\ (1{,}5;\,+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Получено множество значений a, отличающееся от искомого исключением точек $a=\frac{7-2\sqrt{6}}{10}$ и/или $a=\frac{7+2\sqrt{6}}{10}$	3
Получено множество значений a, отличающееся от искомого включением точки $a=1{,}5$, возможно, с исключением точек $a=\frac{7-2\sqrt{6}}{10}$ и/или $a=\frac{7+2\sqrt{6}}{10}$; ИЛИ при обоснованном решении получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*4*

#113 (ДЗ)

18. $-\frac{5+2\sqrt{19}}{3}$; $\frac{-5-2\sqrt{19}}{3}$; -4; 1; $-\frac{4}{3}$.

18. При каких значениях a уравнение $\frac{x-3a}{x+4}+\frac{x-1}{x-a}=1$ имеет ровно один корень? Найдите все возможные значения a.

#115 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых линии $y_1 = a|3-x| + |a| - 3$ и $y_2 = \frac{a}{3}$ ограничивают многоугольник, площадь которого не менее $\frac{1}{3}$.

Источники:
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)

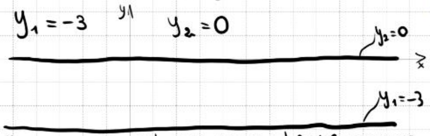
$y_1 = a \cdot |3-x| + |a| - 3$ График - это „Галочка"
$\vee$ при $a>0$
$\wedge$ при $a<0$
Или прямая при $a=0$

$y_2 = \frac{a}{3}$ График – горизонтальная прямая

$\Rightarrow$ многоугольник – это треугольник

$\boxed{1\ случай}$ $a=0$

$y_1 = -3$ $y_2 = 0$



y_1 и y_2 – это параллельные прямые, которые многоугольник не ограничивают $\Rightarrow a \neq 0$

$\boxed{2\ случай}$ $a>0$

на 3 вправо

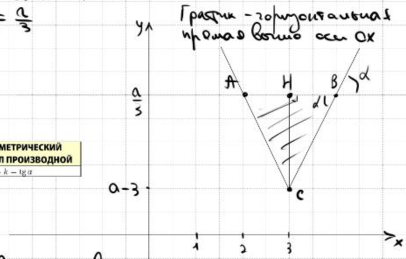
на $a-3$ вверх/вниз

$y_1 = a \cdot |3-x| + a - 3$
$y_1 = a \cdot |x-3| + a - 3$
$y_2 = \frac{a}{3}$

График – „галочка", ветви ↑

График – горизонтальная прямая выше оси Ox

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ
$f'(x_0) = k = \operatorname{tg}\alpha$



① $\frac{a}{3}$ точно выше, чем $a-3$ (иначе бы не образовался треугольник)

② $CH = \frac{a}{3} - (a-3) = 3 - \frac{2}{3} \cdot a = \frac{9-2a}{3}$

③ $\operatorname{tg}\alpha = a$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\angle CBH = \boxed{a = \frac{CH}{BH}} \Rightarrow BH = \frac{CH}{a} = \frac{9-2a}{3a}$

$AB = 2 \cdot BH = \frac{2\cdot(9-2a)}{3a}$

④ Получаем:

$\begin{cases} a>0 \\ CH>0 \\ AB>0 \\ S \geq \frac{1}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} ①\ a>0 \\ ②\ \frac{9-2a}{3}>0 \quad |\cdot 3 \\ ③\ \frac{2(9-2a)}{3a}>0 \quad |\cdot 3a, т.к.\ a>0 \\ ④\ \frac{1}{2}\cdot AB \cdot CH \geq \frac{1}{3} \end{cases}$

② $9-2a>0$
$9>2a$
$2a<9$
$a<\frac{9}{2}$

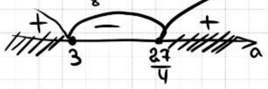
③ $a<\frac{9}{2}$

④ $\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}(9-2a)}{3a} \cdot \frac{(9-2a)}{\cancel{3}} \geq \frac{1}{\cancel{3}}$

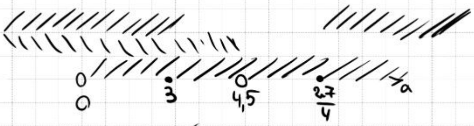
$\frac{(9-2a)^2}{3a} - \frac{1}{1} \geq 0$

$\frac{81 - 36a + 4a^2 - 3a}{3a} \geq 0 \quad |\cdot 3a$ т.к. $a>0$

$4a^2 - 39a + 81 \geq 0$
$D = 1521 - 1296 = 225$
$a = \frac{39 \pm 15}{8}$



Найдём пересечение ①, ②, ③, ④



$\Rightarrow a \in (0; 3]$

$\boxed{3\ случай}$ $a<0$

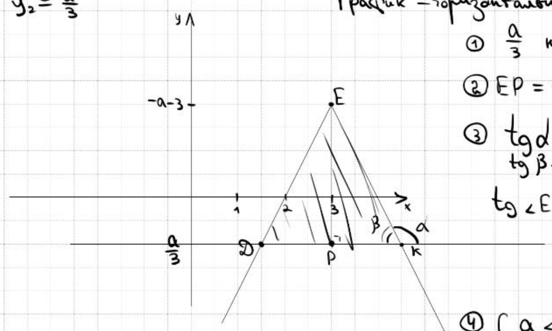
на 3 вправо

на $-a-3$ вверх/вниз

$y_1 = a\,|x-3| - a - 3$
$y_2 = \frac{a}{3}$

График – „галочка", ветви ↓

График – горизонтальная прямая ниже оси Ox



① $\frac{a}{3}$ ниже, чем $-a-3$

② $EP = -a - 3 - \frac{a}{3} = -\frac{4a}{3} - 3 = \frac{-4a-9}{3}$

③ $\operatorname{tg}\alpha = a$
$\operatorname{tg}\beta = -a$

$\operatorname{tg}\angle EKP = \boxed{\frac{EP}{PK} = -a}$ $PK = \frac{EP}{-a}$

$PK = \frac{-4a-9}{3\cdot(-a)} = \frac{4a+9}{3a}$

$DK = 2PK = \frac{(4a+9)\cdot 2}{3a}$

④ $\begin{cases} a<0 \\ EP>0 \\ DK>0 \\ S \geq \frac{1}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} ⑤\ a<0 \\ ⑥\ \frac{-4a-9}{3}>0 \quad |\cdot 3 \\ ⑦\ \frac{(4a+9)\cdot 2}{3a}>0 \quad |\cdot 3a, т.к\ a<0 \\ ⑧\ \frac{1}{2}\cdot EP \cdot DK \geq \frac{1}{3} \end{cases}$

⑥ $-4a-9>0$
$4a<-9$
$a<-\frac{9}{4}$

⑦ $(4a+9)\cdot 2<0$
$4a+9<0$
$4a<-9$
$a<-\frac{9}{4}$

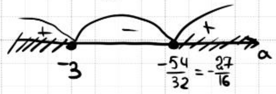
⑧ $\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{(-4a-9)}{\cancel{3}} \cdot \frac{(4a+9)\cdot \cancel{2}}{3a} \geq \frac{1}{\cancel{3}}$

$\frac{-(4a+9)^2}{3a} - \frac{1}{1} \geq 0 \quad |\cdot(-1)$

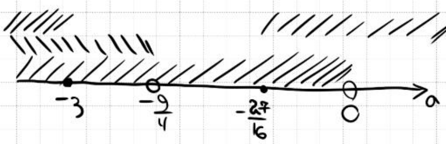
$\frac{(4a+9)^2}{3a} + \frac{1}{1} \leq 0$

$\frac{16a^2 + 72a + 81 + 3a}{3a} \leq 0 \quad |\cdot 3a$ т.к. $a<0$

$16a^2 + 75a + 81 \geq 0$
$D = 5625 - 5184 = 441 = 21^2$
$a = \frac{-75 \pm 21}{32}$



Найдём пересечение: ⑤, ⑥, ⑦ и ⑧



$\Rightarrow$ при $a \in (-\infty; -3]$

Ответ: $(-\infty; -3] \cup (0; 3]$.

#116 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$\left|\frac{x^2-2ax+x+1}{x^2+x+1}\right|<3$$

выполняется при всех x.

Источники:
FIPI
Основная волна (Резерв) 2012

$$-3<\frac{x^2-2ax+x+1}{x^2+x+1}<3 \quad \Big|\cdot(x^2+x+1)$$

Заметим, что $x^2+x+1=(x^2+2\cdot x\cdot 0{,}5+0{,}25)+0{,}75$
$=(x+0{,}5)^2+0{,}75$

$\Rightarrow$ знаменатель положителен при любых x

$\Rightarrow$ домножим на x^2+x+1 все части нер-ва

$$-3\cdot(x^2+x+1)<x^2-2ax+x+1<3\cdot(x^2+x+1)$$

$$\begin{cases}-3x^2-3x-3<x^2-2ax+x+1\\ x^2-2ax+x+1<3x^2+3x+3\end{cases}$$

$$\begin{cases}4x^2-2ax+4x+4>0 & |:2\\ 2x^2+2ax+2x+2>0 & |:2\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x^2-ax+2x+2>0\\ x^2+ax+x+1>0\end{cases}$$

① $2x^2+(2-a)\cdot x+2>0$
② $x^2+(a+1)\cdot x+1>0$

$$\begin{cases}D_1<0\\ D_2<0\end{cases}$$

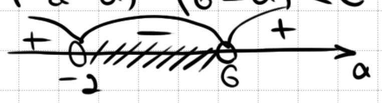
$D_1<0$

$(2-a)^2-4\cdot 2\cdot 2<0$

$(2-a)^2-4^2<0$

$(2-a-4)\cdot(2-a+4)<0$

$(-2-a)\cdot(6-a)<0$



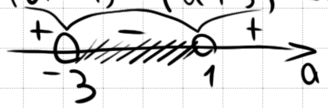
$D_2<0$

$(a+1)^2-4\cdot 1\cdot 1<0$

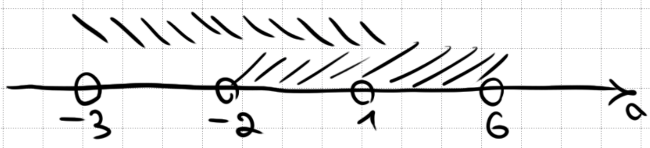
$(a+1)^2-2^2<0$

$(a+1-2)\cdot(a+1+2)<0$

$(a-1)\cdot(a+3)<0$



Найдём пересечение:



Ответ: $(-2;1)$.

#117 (ДЗ)

18

Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$|x^2 - 4x + a| \le 10$$

выполняется для всех $x \in [a\,;\,a+5]$.

63F30E

Источники:

FIPI

$-10 \le x^2 - 4x + a \le 10$

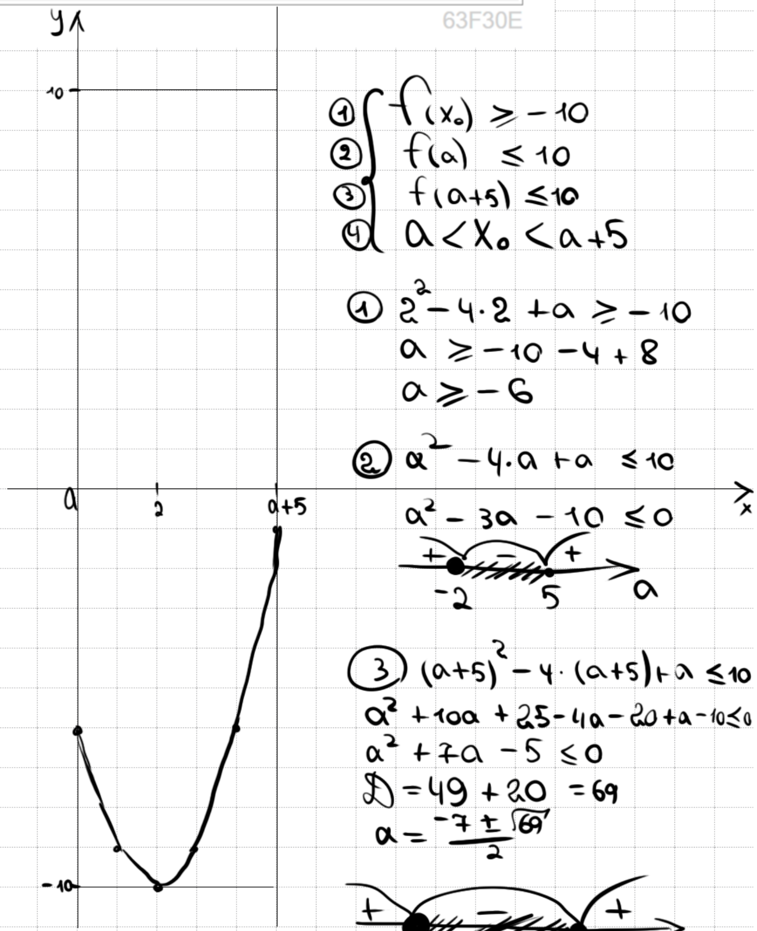
$\Rightarrow$ „Размах" области значений параболы на отрезке $[a; a+5]$ равен 20, т.е. -10 до 10

$x \in [a; a+5]$

$\Rightarrow$ Длина рассматриваемого отрезка по оси Ox равна 5

Пусть $f(x) = x^2 - 4x + a$ График - парабола, ветви ↑

$x_0 = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$



$$\begin{cases} ① & f(x_0) \ge -10 \\ ② & f(a) \le 10 \\ ③ & f(a+5) \le 10 \\ ④ & a < x_0 < a+5 \end{cases}$$

① $2^2 - 4 \cdot 2 + a \ge -10$

$a \ge -10 - 4 + 8$

$a \ge -6$

② $a^2 - 4 \cdot a + a \le 10$

$a^2 - 3a - 10 \le 0$

$+ \quad - \quad +$; -2, 5; a

③ $(a+5)^2 - 4 \cdot (a+5) + a \le 10$

$a^2 + 10a + 25 - 4a - 20 + a - 10 \le 0$

$a^2 + 7a - 5 \le 0$

$D = 49 + 20 = 69$

$a = \frac{-7 \pm \sqrt{69}}{2}$

$+ \quad - \quad +$; $\frac{-7-\sqrt{69}}{2} \approx -7{,}6$, $\frac{-7+\sqrt{69}}{2} \approx 0{,}6$; a

④ $a < x_0 < a+5$

$a < 2 < a+5$

$$\begin{cases} a < 2 \\ 2 < a+5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < 2 \\ a > -3 \end{cases}$$

-3, 2; a

Найдём пересечение:

$\frac{-7-\sqrt{69}}{2}$, -6, -3, -2, $\frac{-7+\sqrt{69}}{2}$, 2, 5; a

Ответ: $\left[-2; \frac{-7+\sqrt{69}}{2}\right]$

#118 (ДЗ)

18

Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$|x^2 - 6x + a| > 10$

не имеет решений на отрезке $[a\,;\,a+6]$.

D0C286

Источники:

FIPI

Основная волна (Резерв) 2012

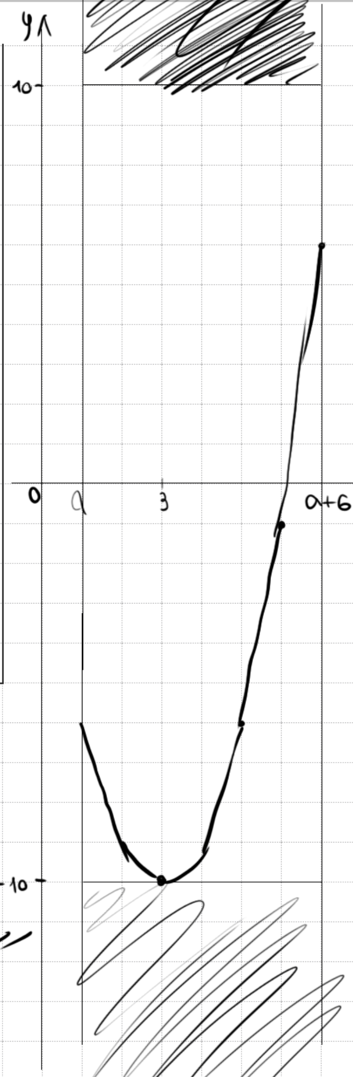
$$\left[\begin{aligned} &x^2 - 6x + a > 10 \\ &x^2 - 6x + a < -10 \end{aligned}\right.$$

$x \in [a\,; a+6]$

$\Rightarrow$ Длина рассматриваемого отрезка по оси Ox равна 6.

Пусть $f(x) = x^2 - 6x + a$ График - парабола, ветви $\uparrow$.

$x_0 = \frac{6}{2} = 3$



$$\begin{cases} ① \; f(x_0) \geq -10 \\ ② \; f(a) \leq 10 \\ ③ \; f(a+6) \leq 10 \\ ④ \; a < x_0 < a+6 \end{cases}$$

① $3^2 - 18 + a + 10 \geq 0$

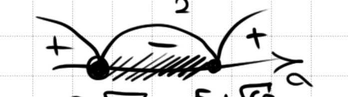
$a \geq 18 - 19$

$a \geq -1$

② $a^2 - 5a - 10 \leq 0$

$D = 25 + 40 = 65$

$a = \frac{5 \pm \sqrt{65}}{2}$



$\frac{5 - \sqrt{65}}{2} \approx -1{,}6$ $\quad \frac{5 + \sqrt{65}}{2} \approx 6{,}6$

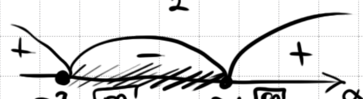
③ $(a+6)^2 - 6 \cdot (a+6) + a - 10 \leq 0$

$a^2 + 12a + \cancel{36} - 6a - \cancel{36} + a - 10 \leq 0$

$a^2 + 7a - 10 \leq 0$

$D = 49 + 40 = 89$

$a = \frac{-7 \pm \sqrt{89}}{2}$

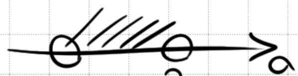


$\frac{-7 - \sqrt{89}}{2} \approx -8{,}2$ $\quad \frac{-7 + \sqrt{89}}{2} \approx 1{,}2$

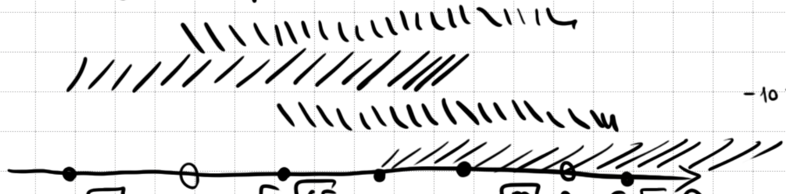
④

$a < 3 < a + 6$

$$\begin{cases} a < 3 \\ a > -3 \end{cases}$$



Найдём пересечение:



Ответ: $\left[-1; \frac{-7+\sqrt{89}}{2}\right]$

#119 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\frac{4a}{a-6}\cdot 3^{|x|}=9^{|x|}+\frac{3a+4}{a-6}$$

имеет ровно два различных корня.

Источники:
FIPI
Основная волна (Резерв) 2013
Основная волна 2014

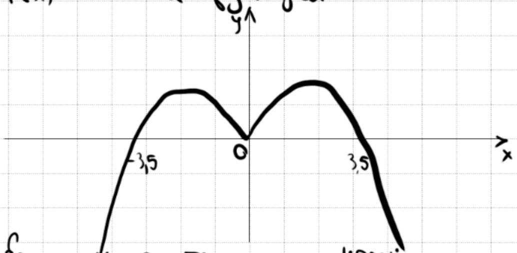
5F5BC3

$$\frac{4a}{a-6}\cdot 3^{|x|}-9^{|x|}-\frac{3a+4}{a-6}=0$$

Пусть $f(x)=\frac{4a}{a-6}\cdot 3^{|x|}-9^{|x|}-\frac{3a+4}{a-6}$

$f(-x)=\frac{4a}{a-6}\cdot 3^{|-x|}-9^{|-x|}-\frac{3a+4}{a-6}=f(x)$

$\Rightarrow f(x)$ – чётная функция



$\Rightarrow$ Если $x=0$, то имеем нечётное кол-во корней $\Rightarrow x\neq 0$

Пусть $3^{|x|}=t$ $\Rightarrow t\geq 1$, но т.к. $x\neq 0$ $\Rightarrow t>1$

Выразим икс:

$3^{|x|}=3^{\log_3 t}$

$|x|=\log_3 t$

$x=\pm\log_3 t$

$\Rightarrow$ После замены, уравнение с t должно иметь ровно один корень t, больший чем единица, что даст нам два различных корня x_1 и x_2

Сделаем замену:

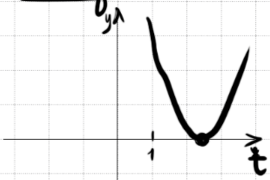
$$\frac{4a}{a-6}\cdot t-t^2-\frac{3a+4}{a-6}=0 \quad |\cdot(-1)$$

$$t^2-\frac{4a}{a-6}\cdot t+\frac{3a+4}{a-6}=0$$

Пусть $f(t)=t^2-\frac{4a}{a-6}\cdot t+\frac{3a+4}{a-6}$. График – парабола, ветви $\uparrow$

Есть 2 случая, когда будет единственный корень $t>1$

1 случай



$$\begin{cases} D=0 \\ t_{единств.}>1 \end{cases}$$

$D=\left(\frac{4a}{a-6}\right)^2-4\cdot 1\cdot\frac{3a+4}{a-6}=0$

$\frac{16a^2}{(a-6)^2}-\frac{12a+16}{a-6}=0$

$\frac{16a^2-12a^2+72a-16a+96}{(a-6)^2}=0$

$4a^2+56a+96=0 \quad |:4$

$a^2+14a+24=0$

$a=-12$

$a=-2$

$t=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{\frac{4a}{a-6}\pm 0}{2\cdot 1}=\frac{2a}{a-6}$

$t_{единств}>1$

$\frac{2a}{a-6}>1$

$\frac{2a}{a-6}-\frac{1}{1}>0$

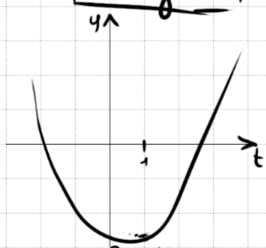
$\frac{2a-a+6}{a-6}>0$

$\frac{a+6}{a-6}>0$

$+\quad -6\quad -\quad 6\quad +\quad a$

$\Rightarrow$ при $a=-12$ произойдёт 1 случай

2 случай



$f(1)<0$

$1^2-\frac{4a}{a-6}\cdot 1+\frac{3a+4}{a-6}<0$

$\frac{a-6-4a+3a+4}{a-6}<0$

$\frac{-2}{a-6}<0 \quad |:(-2)$

$\frac{1}{a-6}>0$

$a-6>0$

$a>6$

$\Rightarrow$ при $a>6$ произойдёт 2 случай.

Объединим в ответ:

Ответ: $\{-12\}\cup(6;+\infty)$

#122 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$4x - \left|3x - |x + a|\right| = 9|x - 1|$$

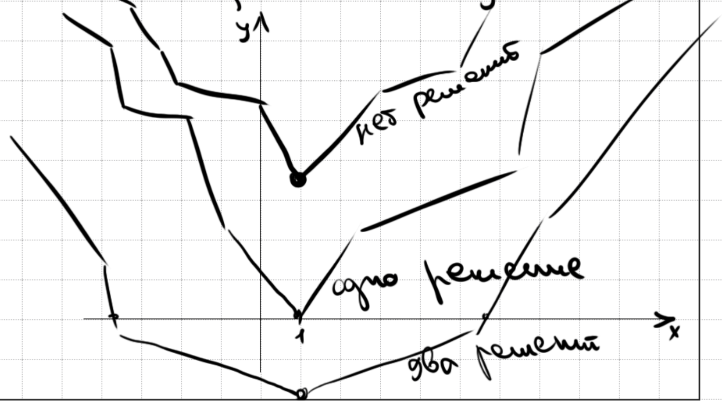
имеет хотя бы один корень.

Источники:
Ященко 2018 (20 вар)
Демо 2010

$9|x-1| - 4x + \left|3x - |x+a|\right| = 0$

Пусть $f(x) = 9|x-1| - 4x + \left|3x - |x+a|\right|$

Если $x \geq 1$, то $f(x)$ - возрастает
$x < 1$, то $f(x)$ - убывает



Чтобы был хотя бы 1 корень, нужно, чтобы $f(1) \leq 0$

$9 \cdot |1-1| - 4 \cdot 1 + \left|3 \cdot 1 - |1+a|\right| \leq 0$

$\left|3 - |1+a|\right| \leq 4$

$-4 \leq 3 - |1+a| \leq 4 \quad |-3$

$-7 \leq -|1+a| \leq 1 \quad |\cdot(-1)$

$7 \geq |1+a| \geq -1$

$-1 \leq |1+a| \leq 7$

$|1+a| \leq 7$

$-7 \leq 1+a \leq 7 \quad |-1$

$-8 \leq a \leq 6$

Ответ: $[-8; 6]$

#123 (ДЗ)

18

Задание с развернутым ответом

Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(|x+3|+|x-a|)^2-6(|x+3|+|x-a|)+5a(6-5a)=0$$

имеет ровно два решения.

i Номер: 4405

Источники:
osfipi
Семёнов 2015
Основная волна 2014

Пусть $|x+3|+|x-a|=t$

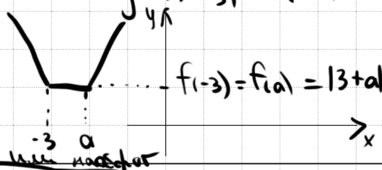
$t^2-6t+5a\cdot(6-5a)=0$

$\left[\begin{array}{l} t_1+t_2=6 \\ t_1\cdot t_2=5a\cdot(6-5a) \end{array}\right.$

$t_1=6-5a \qquad t_2=5a$

$|x+3|+|x-a|=6-5a \qquad |x+3|+|x-a|=5a$

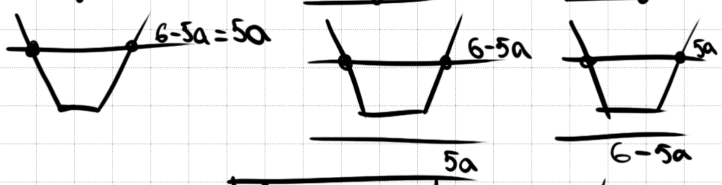
Графиком $y=|x+3|+|x-a|$ будет „корыто"



Графиками $y=6-5a$, $y=5a$ будут горизонт. прямые

Есть 3 случая когда будет 2 решения

$\boxed{1\text{ случай}}$ $\boxed{2\text{ случай}}$ $\boxed{3\text{ случай}}$



$\boxed{2\text{ случай}}$

$①\begin{cases} 6-5a>|3+a| \\ 5a<|3+a| \end{cases}$
②

① $|3+a|<6-5a$

$5a-6<3+a<6-5a$

$\begin{cases} 5a-6<3+a \\ 3+a<6-5a \end{cases}$

$\begin{cases} 4a<9 \\ 6a<3 \end{cases}$

$\begin{cases} a<\frac{9}{4} \\ a<\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a<\frac{1}{2}$

② $|3+a|>5a$

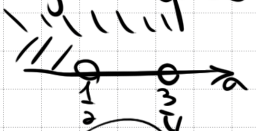
$\left[\begin{array}{l} 3+a>5a \\ 3+a<-5a \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 4a<3 \\ 6a<-3 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} a<\frac{3}{4} \\ a<-\frac{1}{2} \end{array}\right.$

$\Rightarrow a<\frac{3}{4}$

Найдём пересечение ① и ②



$\Rightarrow a<\frac{1}{2}$

$\boxed{1\text{ случай}}$

$6-5a=5a$

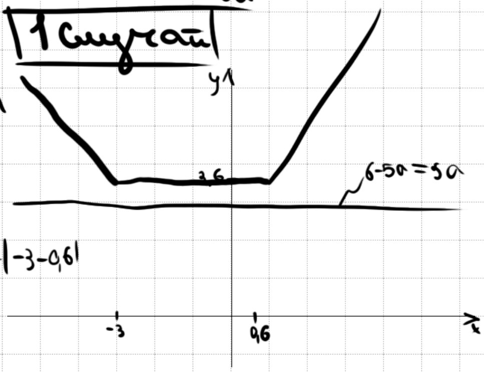
$6=10\cdot a$

$a=0{,}6$

$f(-3)=|-3+3|+|-3-0{,}6|$

$=3{,}6$

$\Rightarrow a\neq 0{,}6$



$\boxed{3\text{ случай}}$

$③\begin{cases} 5a>|3+a| \\ 6-5a<|3+a| \end{cases}$
④

③ $|3+a|<5a$

$-5a<3+a<5a$

$\begin{cases} -5a<3+a \\ 3+a<5a \end{cases}$

$\begin{cases} 6a>-3 \\ 4a>3 \end{cases}$

$\begin{cases} a>-\frac{1}{2} \\ a>\frac{3}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow a>\frac{3}{4}$

④ $|3+a|>6-5a$

$\left[\begin{array}{l} 3+a>6-5a \\ 3+a<5a-6 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 6a>-3 \\ 4a>9 \end{array}\right.$

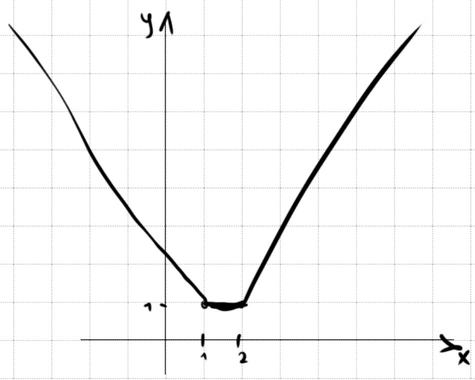
$\left[\begin{array}{l} a>-\frac{1}{2} \\ a>\frac{9}{4} \end{array}\right.$

$\Rightarrow a>\frac{9}{4}$

Найдём пересеч.

$a>\frac{9}{4}$

Ответ: $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{9}{4};+\infty\right)$.



Построим $f(x)=|x-1|+|x-2|$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<1 \\ f(x)=-x+1-x+2 \end{cases} \\ \begin{cases} 1\le x\le 2 \\ f(x)=x-1-x+2 \end{cases} \\ \begin{cases} x>2 \\ f(x)=x-1+x-2 \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<1 \\ f(x)=-2x+3 \end{cases} \\ \begin{cases} 1\le x\le 2 \\ f(x)=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x>2 \\ f(x)=2x-3 \end{cases} \end{array}\right.$

#125 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, для каждого из которых уравнение

$$25^x - (a+6)5^x = (5+3|a|)5^x - (a+6)(3|a|+5)$$

имеет единственное решение.

Источники:
СтатГрад 22.04.2020
СтатГрад 2017

$5^x(5^x-a-6) = (3|a|+5)\cdot(5^x-a-6)$

$5^x\cdot(5^x-a-6) - (3|a|+5)\cdot(5^x-a-6) = 0$

$(5^x-a-6)\cdot(5^x-3\cdot|a|-5) = 0$

$5^x-a-6=0$ $\qquad$ $5^x-3|a|-5=0$

$5^x=a+6$ $\qquad$ $5^x=3|a|+5$

$x_1=\log_5(a+6)$ $\qquad$ $x_2=\log_5(3|a|+5)$

X_2 будет корнем уравнения при любом a

$\Rightarrow$ Чтобы суммарно было единств. решение нужно, чтобы x_1 не являлся корнем ур-я либо являлся, но тогда совпадал бы с x_2

$\boxed{1 \text{ случай}}$

$a+6\le 0$

$a\le -6$

$\boxed{2 \text{ случай}}$

$\log_5(a+6) = \log_5(3|a|+5)$

$a+6=3|a|+5$

$3|a|-a-1=0$

Если $a\ge 0$, то $2a-1=0$

$a=\frac{1}{2}$

Если $a<0$, то $-3a-a-1=0$

$4a=-1$

$a=-\frac{1}{4}$

Объединим в ответ:

Ответ: $(-\infty;-6]\cup\{-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\}$.

#126 (ДЗ)

18. **Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение**

$$|x-a^2+4a-2|+|x-a^2+2a+3| = 2a-5$$

имеет хотя бы один корень на отрезке [5; 23].

Решение.

Разность выражений, стоящих под знаками модуля, совпадает с правой частью уравнения:

$$(x-a^2+4a-2)-(x-a^2+2a+3)=2a-5.$$

Сделаем замену: $m=x-a^2+4a-2$, $n=x-a^2+2a+3$. Тогда уравнение примет вид:

$$|m|+|n|=m-n.$$

Это равносильно условию $n\le 0\le m$. Получаем:

$$x-a^2+2a+3\le 0\le x-a^2+4a-2;$$

$$a^2-4a+2\le x\le a^2-2a-3.$$

Уравнение имеет хотя бы один корень на отрезке [5; 23], только если правая граница отрезка решений не меньше 5, а левая не больше 23. Получаем

$$\begin{cases} a^2-4a+2\le a^2-2a-3,\\ a^2-2a-3\ge 5,\\ a^2-4a+2\le 23;\end{cases} \quad \begin{cases} 2a\ge 5,\\ a^2-2a-8\ge 0,\\ a^2-4a-21\le 0;\end{cases} \quad \begin{cases} a\ge 2,5,\\ (a-4)(a+2)\ge 0,\\ (a-7)(a+3)\le 0;\end{cases} \quad \begin{cases} a\ge 2,5,\\ \left[\begin{array}{l} -3\le a\le -2,\\ 4\le a\le 7.\end{array}\right.\end{cases}$$

Ответ: $4\le a\le 7$.

#127 (ДЗ)

19

Задание 18 № 526595

Найдите все значения a, при каждом из которых любое число x из отрезка $[3;5]$ является решением уравнения $|x-a-6|+|x+a+4|=2a+10$.

Решение.

Если $2a+10<0$, то уравнение решений не имеет.

Пусть $a=-5$. Тогда уравнение имеет вид $|x-1|+|x-1|=0$ и ни одно число из отрезка $[3, 5]$ не является его решением.

Пусть $a>-5$. Запишем уравнение в виде

$$|x-(a+6)|+|x-(-a-4)|=2a+10.$$

При $a>-5$ верно неравенство $-a-4<a+6$, и поэтому решением уравнения является любое число из отрезка $[-a-4,\ a+6]$, поскольку длина этого отрезка равна $(a+6)-(-a-4)=2a+10$ и уравнению удовлетворяют те и только те точки x, сумма расстояний от каждой из которых до точек $x=a+6$ и $x=-a-4$ равна $2a+10$.

Осталось выбрать те значения a, при каждом из которых отрезок $[-a-4,\ a+6]$ содержит отрезок $[3, 5]$. Это выполнено тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} -a-4\le 3, \\ a+6\ge 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -7, \\ a\ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow a\ge 1.$$

Ответ: $a\ge 1$.

Аналоги к заданию № 526595: 526603 Все

Спрятать решение · В избранное (0) · Поделиться · Сообщить об ошибке · Помощь

#128 (ДЗ)

5. Задание 18 № 510858

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(|x+7|-|x-a|)^2-13a(|x+7|-|x-a|)+30a^2+21a-9=0$$

имеет ровно два решения.

Решение.

Пусть $t=|x+7|-|x-a|$, тогда исходное уравнение принимает вид:

$$t^2-13at+30a^2+21a-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3a+3, \\ t=10a-3. \end{array}\right. \quad (1)$$

откуда

$$\left[\begin{array}{l} |x+7|-|x-a|=3a+3, \\ |x+7|-|x-a|=10a-3. \end{array}\right. \quad (2)$$

Значит, решение исходного уравнения — это решение уравнений $|x+7|-|x-a|=3a+3$ или $|x+7|-|x-a|=10a-3$. Исследуем сколько решений имеет уравнение $|x+7|-|x-a|=b$ в зависимости от a и b. Запишем уравнение в виде $|x+7|=|x-a|+b$. Левая часть этого уравнения — график модуля с вершиной в точке $(-7,0)$, график левой части — график модуля, с вершиной в точке (a,b). Это уравнение может иметь одно, либо бесконечное множество решений. Уравнение будет иметь одно решение, если одновременно прямая $y=-x+a+b$ лежит выше прямой $y=-x-7$ и прямая $y=x-a+b$ лежит ниже прямой $y=x+7$, либо, если одновременно прямая $y=-x+a+b$ лежит ниже прямой $y=-x-7$ и прямая $y=x-a+b$ лежит выше прямой $y=x+7$. Получаем совокупность двух систем уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b>-7, \\ a-b>-7, \end{cases} \\ \begin{cases} a+b<-7, \\ a-b<-7. \end{cases} \end{array}\right. \quad (3)$$

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два решения, если оба уравнения совокупности (2) имеют по одному решению.

Для первого уравнения имеем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+3a+3>-7, \\ a-3a-3>-7, \end{cases} \\ \begin{cases} a+3a+3<-7, \\ a-3a-3<-7. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4a>-10, \\ -2a>-4, \end{cases} \\ \begin{cases} 4a<-10, \\ -2a<-4. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -2{,}5<a<2.$$

Для второго уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+10a-3>-7, \\ a-10a+3>-7, \end{cases} \\ \begin{cases} a+10a-3<-7, \\ a-10a+3<-7 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 11a>-4, \\ -9a>-10, \end{cases} \\ \begin{cases} 11a<-4, \\ -9a<-10 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{4}{11}<a<\frac{10}{9}.$$

Если уравнения совокупности совпадают, то тогда, даже если каждое из них имеет по одному решению, то эти решения совпадут и исходное уравнение будет иметь не два, а одно решение. Исключим данный случай, найдём при каких значениях параметра a уравнения совпадают:

$$3a+3=10a-3 \Leftrightarrow a=\frac{6}{7}.$$

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два решения при значениях параметра a:

$$\begin{cases} -2{,}5<a<2, \\ -\frac{4}{11}<a<\frac{10}{9}, \\ a\neq\frac{6}{7}. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{4}{11}<a<\frac{6}{7}, \\ \frac{6}{7}<a<\frac{10}{9}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-\frac{4}{11};\frac{6}{7}\right)\cup\left(\frac{6}{7};\frac{10}{9}\right)$.

Дублирует задание 505496.

#129 (ДЗ)

18 Найдите все целые отрицательные значения параметра a, при каждом из которых существует такое действительное число $b > a$, что неравенство $20b \ge 6|2a+b| + 2|b-2| - |2a-b| - 5|4a^2 - b + 2|$ **не выполнено.**

Решение.

Решим вспомогательную противоположную задачу: найдём все a, при каждом из которых неравенство $20b \ge 6|2a+b| + 2|b-2| - |2a-b| - 5|4a^2 - b + 2|$ выполнено при любом $b > a$. Заметим далее, что данное неравенство равносильно неравенству

$$F(b) = 20b - 6|2a+b| - 2|b-2| + |2a-b| + 5|4a^2 - b + 2| \ge 0,$$

причём функция $F(b)$ строго монотонно возрастает на множестве действительных чисел и, следовательно, первоначальное неравенство выполняется для всех $b > a$ тогда и только тогда, когда $F(a) \ge 0$, то есть $20a^2 + 15a - 17|a| - 2|a-2| + 10 \ge 0$. Отметим, что при $a \ge 0$ полученное неравенство верно. Если $a < 0$, то неравенство равносильно неравенству

$$10a^2 + 17a + 3 \ge 0; \quad \left[\begin{array}{l} -0{,}2 \le a < 0; \\ a \le -1{,}5. \end{array}\right.$$

Таким образом, существует только одно целое отрицательное значение $a = -1$, при котором условие вспомогательной задачи не выполнено. Следовательно, при значении $a = -1$ существует такое $b > a$, что неравенство $20b \ge 6|2a+b| + 2|b-2| - |2a-b| - 5|4a^2 - b + 2|$ не выполнено.

Ответ: -1.

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения неравенства	2
Задача верно сведена к исследованию решения неравенства	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

#130 (ДЗ)

1 **Задание 18 № 507224**

Найдите все значения параметра k, при каждом из которых уравнение $\dfrac{1+(2-2k)\sin t}{\cos t-\sin t}=2k$ имеет хотя бы одно решение на интервале $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Решение.

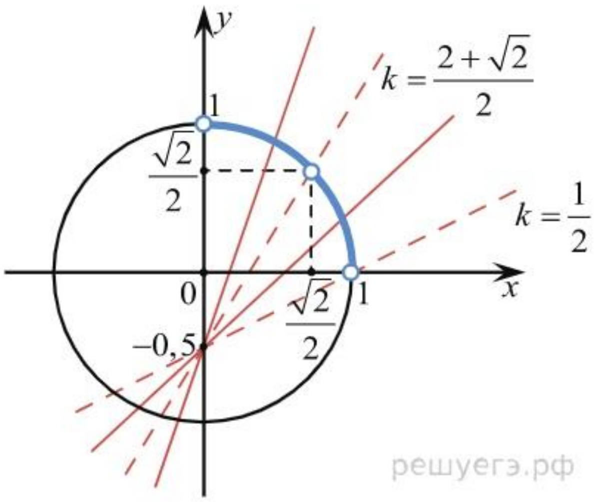
Обозначим в исходном уравнении $x=\cos t,\ y=\sin t$.

Имеем:

$$\frac{1+(2-2k)y}{x-y}=2k \Leftrightarrow \begin{cases}1+2y-2ky=2kx-2ky,\\ x\neq y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=kx-\dfrac{1}{2}, \ (*)\\ x\neq y.\end{cases}$$

Отметим далее, что в силу введённых обозначений $x^2+y^2=1\ (**)$. Поэтому искомыми являются те значения параметра, при которых прямые, задаваемые уравнением $(*)$, имеют с единичной окружностью $(**)$ точки пересечения, лежащие в первой координатной четверти ($0<x,y<1$) и отличные от точек прямой $y=x$.

В системе координат, изображённой на рисунке, уравнение $(*)$ задаёт пучок прямых (отмечены красным цветом), проходящих через точку $(0;\ -0,5)$.



Найдем угловой коэффициент прямой, проходящей через $(1;\ 0)$: $k=\dfrac{1}{2}$. У прямой, проходящей через точку $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, угловой коэффициент $k=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}+2}{2}$.

Таким образом, условие задачи выполняется, если

$$\frac{1}{2}<k<\frac{\sqrt{2}+2}{2} \text{ или } k>\frac{\sqrt{2}+2}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{2}<k<\dfrac{\sqrt{2}+2}{2}$ или $k>\dfrac{\sqrt{2}+2}{2}$.

Спрятать решение · В избранное (63) · Поделиться · Сообщить об ошибке · Помощь

#132 (ДЗ)

18. **Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $\dfrac{a-\left(a^2-2a+0,5\right)\cos x+4}{(\sin x)^2+a^2+1}<1$ содержит отрезок $\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right]$.**

18. $a<\dfrac{3-\sqrt{57}}{4};\ a>\dfrac{3+\sqrt{57}}{4}$

#134 (ДЗ)

18

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(6\sin x - 2 - 3a)\cdot\sin x + 3{,}5\cos 2x + 0{,}5 = 0$$

имеет хотя бы один корень.

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

A26DE4

$6\sin^2 x - 2\cdot\sin x - 3\cdot a\sin x + 3{,}5\cdot(1-2\sin^2 x) + 0{,}5 = 0$

$-\sin^2 x - 2\sin x - 3a\cdot\sin x + 4 = 0 \quad |\cdot(-1)$

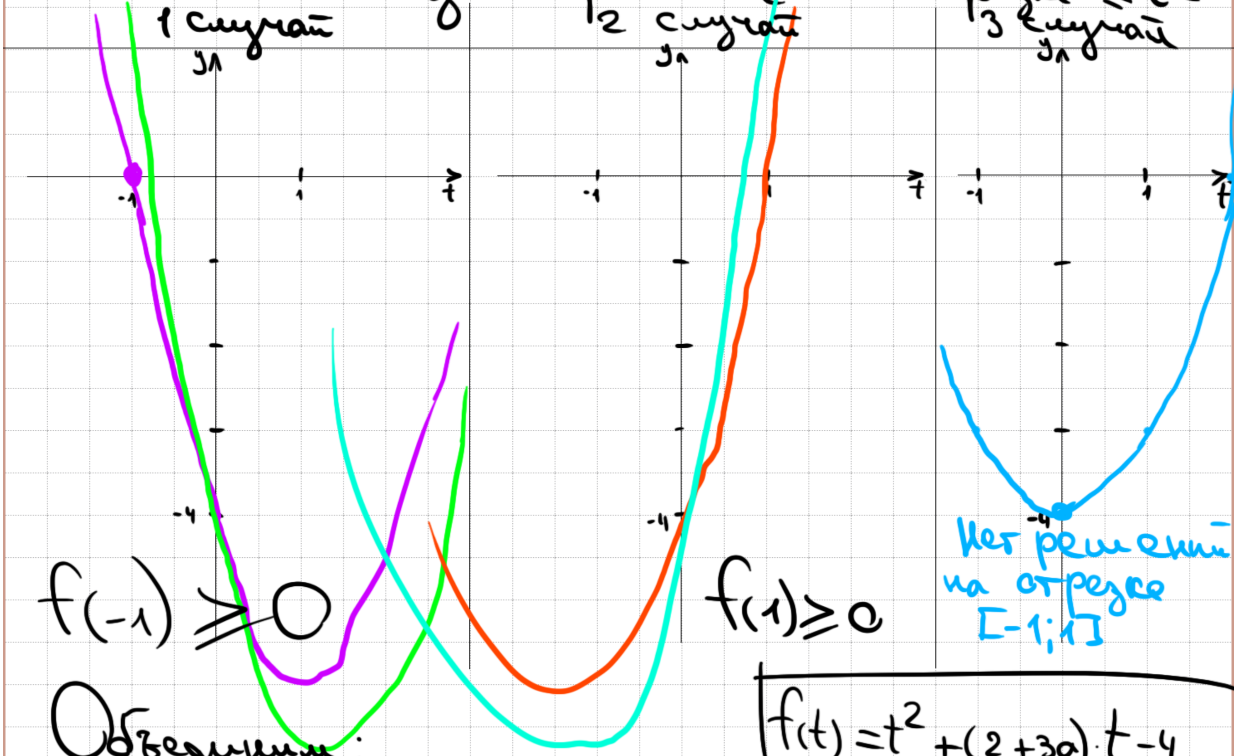
$\sin^2 x + 2\sin x + 3a\cdot\sin x - 4 = 0$

$1\cdot\sin^2 x + (2+3a)\cdot\sin x - 4 = 0$

Пусть $\sin x = t \qquad -1 \le t \le 1$

$t^2 + (2+3a)\cdot t - 4 = 0$ — график - парабола, ветви ↑, проходит через $(0;-4)$

Найдём все a при каждом из которых уравнение имеет хотя бы один корень t на отрезке $-1 \le t \le 1$



$$f(t) = t^2 + (2+3a)\cdot t - 4$$

Объединим:

$$\left[\begin{array}{l} f(-1) \ge 0 \\ f(1) \ge 0 \end{array}\right.$$

$f(-1) \ge 0$

$(-1)^2 + (2+3a)\cdot(-1) - 4 \ge 0$

$1 - 2 - 3a - 4 \ge 0$

$-3a \ge 5 \quad |:(-3)$

$a \le -\frac{5}{3}$

$f(1) \ge 0$

$1^2 + (2+3a)\cdot 1 - 4 \ge 0$

$1 + 2 + 3a - 4 \ge 0$

$3a \ge 1$

$a \ge \frac{1}{3}$

Объединим:

$-\frac{5}{3} \qquad \frac{1}{3} \qquad a$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{5}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$

#135 (ДЗ)

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2\sin x + \cos x = a$ имеет единственное решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

#18.15

Источники:
Досрочная волна (Резерв) 2019
Пробный ЕГЭ 2018

Рассмотрим $y = 2\sin x + \cos x$

$y' = 2\cos x - \sin x = 0$

$2\cos x = \sin x \quad | : \cos x \neq 0$

$\operatorname{tg} x = 2$

$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{tg}\alpha = 2$

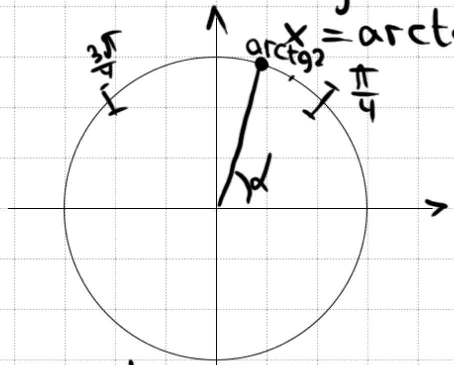
$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$1 + 4 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{5}$

$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$



$\Rightarrow x = \operatorname{arctg} 2$

$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$

$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot 0 - 1 < 0$

$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1{,}5\sqrt{2}$

$y(\operatorname{arctg} 2) = 2 \cdot \sin\operatorname{arctg} 2) + \cos(\operatorname{arctg} 2) = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

$y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}5\sqrt{2}$

Схематично построим график:

Ответ: $[0{,}5\sqrt{2}; 1{,}5\sqrt{2}) \cup \{\sqrt{5}\}$.

#137 (ДЗ)

18 Найдите все значения x, каждое из которых является решением уравнения $\frac{5a\sqrt{3}\sin 4x+(\sqrt{3}-5a)\cos 4x}{6\sin 4x-\sqrt{3}\cos 4x}=1$ при любом значении a из отрезка $[-3\sqrt{2};1]$.

Решение.
Искомые значения x должны быть среди решений данного уравнения при $a=0$, т. е. среди решений уравнения

$$\frac{\sqrt{3}\cos 4x}{6\sin 4x-\sqrt{3}\cos 4x}=1;\quad \sqrt{3}\cos 4x=6\sin 4x-\sqrt{3}\cos 4x;\quad \operatorname{tg} 4x=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$x=\frac{\pi}{24}+\frac{m\pi}{4},\ m\in\mathbb{Z}.$$

Пусть некоторое $x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$, — решение данного уравнения. Тогда равенство $\dfrac{5a\frac{\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-5a)\frac{\sqrt{3}}{2}}{6\cdot\frac{1}{2}-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$ при всех a из отрезка $[-3\sqrt{2};1]$ выполняется. Следовательно, все значения $x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$, условию задачи удовлетворяют.
Пусть некоторое $x=\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$, — решение данного уравнения. Тогда равенство $\dfrac{-5a\frac{\sqrt{3}}{2}-(\sqrt{3}-5a)\frac{\sqrt{3}}{2}}{-6\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$ при всех a из отрезка $[-3\sqrt{2};1]$ выполняется. Следовательно, все значения $x=\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},\quad k\in\mathbb{Z}$, удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $x=\frac{\pi}{24}+\frac{m\pi}{4}$, где $m\in\mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения x, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены не все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

#138 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - 4x^2 + a^2} = x^2 + 2x - a$$

имеет ровно три различных корня.

Источники:
FIPI
osfipi
Сергеев 2018
Основная волна 2016
СтатГрад 26.01.2017

$$\begin{cases} (1)\ x^2 + 2x - a \geq 0 \\ (2)\ x^4 - 4x^2 + a^2 = (x^2 + (2x - a))^2 \end{cases}$$

Решим уравнение (2)

$\cancel{x^4} - 4x^2 + a^2 = \cancel{x^4} + 2 \cdot x^2 \cdot (2x - a) + (2x - a)^2$

$-4x^2 + \cancel{a^2} = 4x^3 - 2 \cdot a \cdot x^2 + 4x^2 - 4a \cdot x + \cancel{a^2}$

$-8x^2 - 4x^3 + 2 \cdot a \cdot x^2 + 4ax = 0 \quad | : 2$

$-4x^2 - 2x^3 + ax^2 + 2ax = 0$

$-2x^2 \cdot (2 + x) + ax \cdot (x + 2) = 0$

$(2 + x) \cdot (-2x^2 + a \cdot x) = 0$

$x \cdot (2 + x) \cdot (-2x + a) = 0$

$x_1 = 0 \qquad 2 + x = 0 \qquad -2x + a = 0$

$\qquad\quad x_2 = -2 \qquad a = 2 \cdot x$

$\qquad\qquad\qquad x_3 = \frac{a}{2}$

$$\begin{cases} \frac{a}{2} \neq 0 \\ \frac{a}{2} \neq -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -4 \end{cases}$$

Найдём при каких a каждый из трёх корней удовл. нер-ву (1)

$x_1 = 0 \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = \frac{a}{2}$

(1) $0^2 + 2 \cdot 0 - a \geq 0$

$a \leq 0$

(1) $(-2)^2 + 2 \cdot (-2) - a \geq 0$

$4 - 4 - a \geq 0$

$a \leq 0$

(1) $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{a}{2} - a \geq 0$

$\frac{a^2}{4} + \cancel{a} - \cancel{a} \geq 0$

$a^2 \geq 0$

a – любое, кроме 0 и -4

Получаем: $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -4 \\ a \leq 0 \end{cases}$

Ответ: $(-\infty; -4) \cup (-4; 0)$

#139 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{15x^2+6ax+9}=x^2+ax+3$$

имеет ровно три различных корня.

Источники:
FIPI
osfipi
Основная волна 2016

$$\begin{cases} ① \; x^2+ax+3\geq 0 \\ ② \; 15x^2+6ax+9=(x^2+(ax+3))^2 \end{cases}$$

Решим уравнение ②

$15x^2+6\cdot a\cdot x+9=x^4+2\cdot x^2\cdot(ax+3)+(ax+3)^2$

$15x^2+\cancel{6\cdot a\cdot x}+\cancel{9}=x^4+2\cdot a\cdot x^3+6x^2+a^2x^2+\cancel{6ax+9}$

$x^4+2\cdot a\cdot x^3-9\cdot x^2+a^2\cdot x^2=0$

$x^2\cdot(x^2+2a\cdot x-9+a^2)=0$

$x^2\cdot((x+a)^2-3^2)=0$

$x\cdot(x+a-3)\cdot(x+a+3)=0$

$x_1=0$ $\qquad x+a-3=0$ $\qquad x+a+3=0$

$\qquad\qquad x_2=-a+3$ $\qquad x_3=-a-3$

Чтобы корни были различными нужно

$$\begin{cases} -a+3\neq 0 \\ -a-3\neq 0 \\ -a+3\neq -a-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\neq 3 \\ a\neq -3 \\ 0\cdot a\neq -6 \end{cases} \qquad \begin{cases} a\neq \pm 3 \\ a \text{ — любое} \end{cases}$$

Найдём при каких a каждый из трёх корней уравнения удовлетворяет нер-ву ①

$x_1=0$ $\qquad x_2=-a+3$ $\qquad x_3=-a-3$

① $0^2+a\cdot 0+3\geq 0$

a — любое, кроме ± 3

① $(-a+3)^2+a\cdot(-a+3)+3\geq 0$

$(3-a)^2+a\cdot(-a+3)+3\geq 0$

$9-6a+\cancel{a^2}-\cancel{a^2}+3a+3\geq 0$

$12\geq 3a$

$a\leq 4$

① $(-a-3)^2+a\cdot(-a-3)+3\geq 0$

$(a+3)^2+a\cdot(-a-3)+3\geq 0$

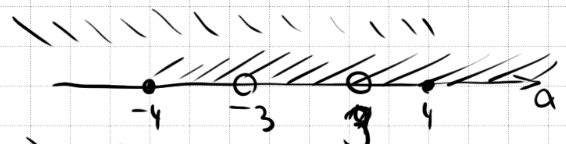
$\cancel{a^2}+6a+9-\cancel{a^2}-3a+3\geq 0$

$3a\geq -12$

$a\geq -4$

Получаем:

$$\begin{cases} a\neq 3 \\ a\neq -3 \\ a\geq -4 \\ a\leq 4 \end{cases}$$



Ответ: $[-4;-3)\cup(-3;3)\cup(3;4]$.

#141 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$2^x - a = \sqrt{4^x - 3a}$$

имеет единственный корень.

Источники:
FIPI
osfipi
Основная волна 2016

Пусть $2^x = t$ $\quad t > 0$
$x = \log_2 t$

$t - a = \sqrt{t^2 - 3a}$

$\begin{cases} t - a \geq 0 \\ (t-a)^2 = t^2 - 3a \\ t > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \cancel{t^2} - 2at + a^2 - \cancel{t^2} + 3a = 0 \\ t \geq a \\ t > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2a \cdot t = a^2 + 3a \\ t \geq a \\ t > 0 \end{cases}$ — это линейное уравнение, т.е. оно имеет единственное решение только если $a \neq 0$

т.к. при $a = 0$ $0 \cdot t = 0$
t - любое $\Rightarrow$ решений бесконечно много

$\begin{cases} t = \frac{a^2 + 3a}{2a} = \frac{\cancel{a} \cdot (a+3)}{2 \cdot \cancel{a}} \\ a \neq 0 \\ t \geq a \\ t > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} t = \frac{a+3}{2} \\ a \neq 0 \\ \frac{a+3}{2} \geq a \quad | \cdot 2 \\ \frac{a+3}{2} > 0 \quad | \cdot 2 \end{cases}$

$\begin{cases} t = \frac{a+3}{2} \\ a \neq 0 \\ a + 3 \geq 2a \\ a + 3 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} t = \frac{a+3}{2} \\ a \neq 0 \\ a \leq 3 \\ a > -3 \end{cases}$

$\Rightarrow$ при $a \in (-3; 0) \cup (0; 3]$ единственный положительный $t = \frac{a+3}{2}$
$\Rightarrow$ исходное уравнение имеет единственный корень икс.

Ответ: $(-3; 0) \cup (0; 3]$.

#142 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2^x - a} + \frac{a-4}{\sqrt{2^x - a}} = 1$$

имеет ровно два различных корня.

Источники:
FIPI
osfipi
Основная волна 2016

Пусть $\sqrt{2^x - a} = t \qquad t > 0$

$2^x - a = t^2$

$2^x = t^2 + a$

$x = \log_2(t^2 + a)$

$\Rightarrow$ Если уравнение $t + \frac{a-4}{t} = 1$ имеет два разных положительных корня t, то мы получим два разных x

$$\frac{t}{1} + \frac{a-4}{t} - \frac{1}{1} = 0$$

$$\frac{t^2 - t + a - 4}{t} = 0$$

Нам нужно, чтобы $t^2 - t + a - 4 = 0$ имело два разных положительных корня t

$t^2 - t + a - 4 = 0$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 1 \\ t_1 \cdot t_2 = a - 4 \end{cases}$$

Заметим из первого уравнения системы, что хотя бы один из корней точно положительный

Пусть $t_1 > 0$

Рассмотрим второе ур-е системы:

$t_1 \cdot t_2 = a - 4$

полож · ноль или отриц, или полож ?

Чтобы t_2 было положительным, нужно, чтобы $a - 4 > 0$

Получаем: $\begin{cases} D > 0 \\ a - 4 > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a-4) > 0 \\ a - 4 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4a + 17 > 0 \\ a > 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < \frac{17}{4} \\ a > 4 \end{cases}$$

Ответ: $(4; 4,25)$

#143 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(4x - x^2)^2 - 32\sqrt{4x - x^2} = a^2 - 14a$$

имеет хотя бы один корень.

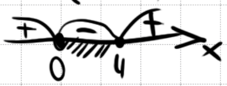
Источники:
Основная волна (Резерв) 2018
Пробный ЕГЭ 2019
Пробный ЕГЭ 2015

Пусть $\sqrt{4x - x^2} = t$ $\quad t \geq 0$

ОДЗ: $4x - x^2 \geq 0 \quad |\cdot(-1)$

$x^2 - 4x \leq 0$

$x \cdot (x-4) \leq 0$



Наибольшее значение $\sqrt{4x-x^2}$ достигает в вершине параболы $y = 4x - x^2$, т. е. $x_0 = \frac{-4}{-2} = 2$

$t_{наиб} = \sqrt{4 \cdot 2 - 2^2} = 2$

$\Rightarrow \quad 0 \leq t \leq 2$

Получаем $t^4 - 32 \cdot t = a^2 - 14a$

Пусть $f(t) = t^4 - 32t$ на $0 \leq t \leq 2$

Исследуем $f(t)$ на монотонность

$f'(t) = 4t^3 - 32$

$4 \cdot t^3 - 32 = 0$

$4 \cdot t^3 = 32$

$t^3 = 8$

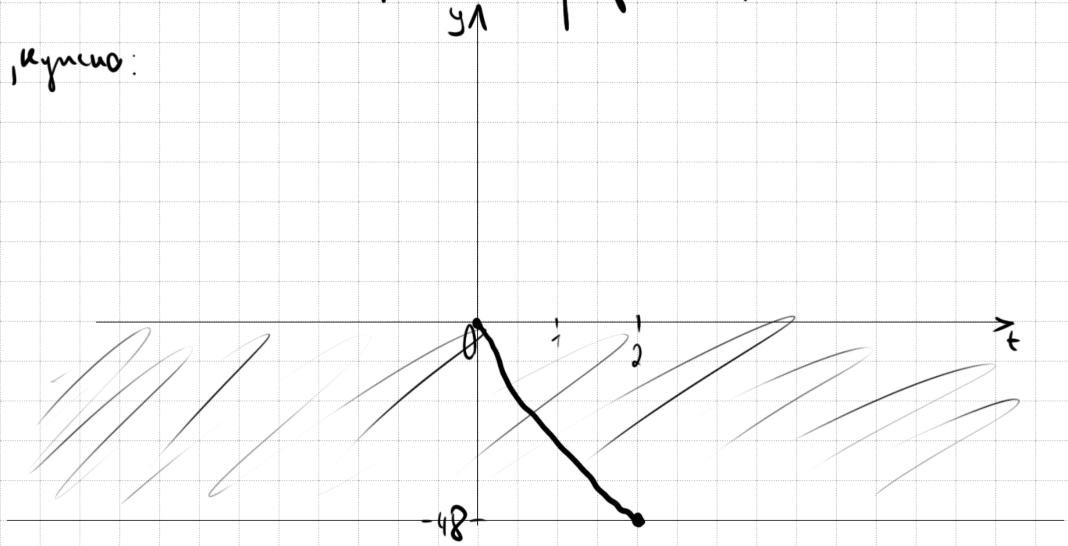
$t = 2$

t	0	2
$f(t)$	0	-48

Вернёмся к уравнению:

$t^4 - 32t = a^2 - 14a$

Решим графически:



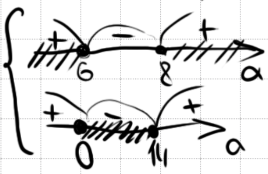
$y = a^2 - 14a$ – это горизонтальная прямая

Чтобы были решения, нужно:

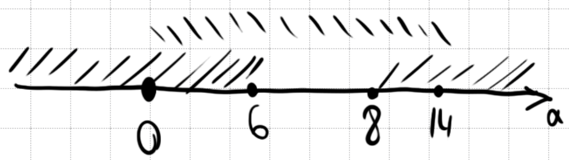
$-48 \leq a^2 - 14a \leq 0$

$$\begin{cases} -48 \leq a^2 - 14a \\ a^2 - 14a \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 14a + 48 \geq 0 \\ a \cdot (a - 14) \leq 0 \end{cases}$$



Найдём пересечение:



Ответ: $[0;6] \cup [8;14]$

#145 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{a+2,5}(x^2+3) = \log_{a+2,5}\left((a+4)x+4\right)$$

имеет ровно два различных корня.

Источники:
Ященко 2021 (10 вар)
Ященко 2020 (10 вар)
Ященко 2020 (50 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2019 (14 вар)

$$\begin{cases} x^2+3=(a+4)\cdot x+4 \\ a+2,5>0 \\ a+2,5\neq 1 \end{cases}$$

Система имеет два решения, если квадратное уравнение имеет два корня и оба они удовл. ограничениям для a.

(1) $\begin{cases} D>0 \\ a>-2,5 \\ a\neq -1,5 \end{cases}$

(1) $D>0$

$x^2-(a+4)\cdot x-1=0$

$D=(a+4)^2-4\cdot 1\cdot(-1)=(a+4)^2+4$

$(a+4)^2+4>0$ при любом a

Найдём пересечение:

$\begin{cases} a - \text{любое} \\ a>-2,5 \\ a\neq -1,5 \end{cases}$

Ответ: $(-2,5;-1,5)\cup(-1,5;+\infty)$

#146 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(\log_6(x+a)-\log_6(x-a))^2-4a(\log_6(x+a)-\log_6(x-a))+3a^2+4a-4=0$$

имеет ровно два решения.

Источники:
osfipi
Семёнов 2015
Основная волна 2014

Пусть $\log_6(x+a)-\log_6(x-a)=t$

$t^2-4\cdot a\cdot t+3a^2+4a-4=0$

$D=16a^2-12a^2-16a+16=4a^2-16a+16=(2a-4)^2$

$t=\frac{4a\pm|2a-4|}{2}$

$t_1=\frac{4a+2a-4}{2}=3a-2 \qquad t_2=\frac{4a-2a+4}{2}=a+2$

$\log_6(x+a)-\log_6(x-a)=3a-2$ или $\log_6(x+a)-\log_6(x-a)=a+2$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\log_6\frac{x+a}{x-a}=3a-2\\ \log_6\frac{x+a}{x-a}=a+2\end{array}\right.\\ x+a>0\\ x-a>0\end{cases} \Rightarrow x>|a|$$

$\boxed{1\text{ случай}}$ Когда два уравнения в совокупности сводятся к одному

$3a-2=a+2$
$2a=4$
$a=2$
$\Rightarrow$ при $a=2$ $\begin{cases}\log_6\frac{x+2}{x-2}=4\\ x+2>0\\ x-2>0\end{cases}$

$\begin{cases}1296=\frac{x+2}{x-2}\\ x\neq 2\\ x>2\end{cases}$ $\begin{cases}1296x-2\cdot1296=x+2\\ x>2\end{cases}$ линейное ур-е, т.е. имеет единств. корень

$\Rightarrow a\neq 2$

$\boxed{2\text{ случай}}$ $a=0$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\log_6 1=-2\\ \log_6 1=2\end{array}\right.\\ x>0\end{cases}$$

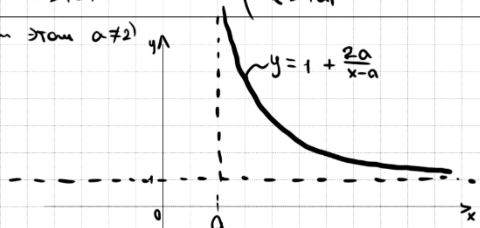
нет решений
$\Rightarrow a\neq 0$

При $a\neq 0$ и $a\neq 2$ получаем систему.

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\log_6\frac{x+a}{x-a}=3a-2\\ \log_6\frac{x+a}{x-a}=a+2\end{array}\right.\\ x>|a|\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\frac{x+a}{x-a}=6^{3a-2}\\ \frac{x+a}{x-a}=6^{a+2}\end{array}\right.\\ x>|a|\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\frac{x-a}{x-a}+\frac{2a}{x-a}=6^{3a-2}\\ \frac{x-a}{x-a}+\frac{2a}{x-a}=6^{a+2}\end{array}\right.\\ x>|a|\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}1+\frac{2a}{x-a}=6^{3a-2}\\ 1+\frac{2a}{x-a}=6^{a+2}\end{array}\right.\\ x>|a|\end{cases}$$

$\boxed{3\text{ случай}}$ $a>0$ (при этом $a\neq 2$)

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}1+\frac{2a}{x-a}=6^{3a-2}\\ 1+\frac{2a}{x-a}=6^{a+2}\end{array}\right.\\ x>a\end{cases}$$



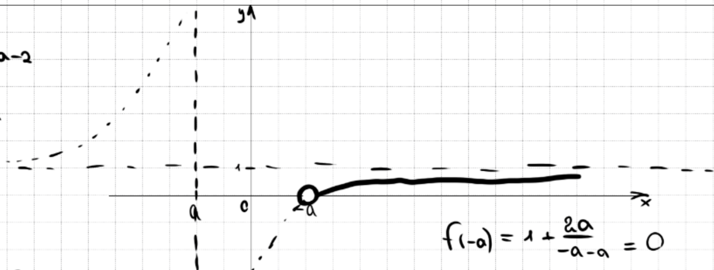
$\Rightarrow$ уравнение $1+\frac{2a}{x-a}=6^{3a-2}$ будет иметь один корень если $6^{3a-2}>1$
Больше одного корня это уравнение иметь не может
$\Rightarrow$ Чтобы было 2 корня, нужно, чтобы выполнялось $\begin{cases}6^{3a-2}>1\\ 6^{a+2}>1\end{cases}$ $\begin{cases}6^{3a-2}>6^0\\ 6^{a+2}>6^0\end{cases}$

$\begin{cases}3a-2>0\\ a+2>0\end{cases}$ $\begin{cases}a>\frac{2}{3}\\ a>-2\end{cases}$

$\Rightarrow$ при $\underset{(a\neq 2)}{a}>\frac{2}{3}$ будет 2 решения.

$\boxed{4\text{ случай}}$ $a<0$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}1+\frac{2a}{x-a}=6^{3a-2}\\ 1+\frac{2a}{x-a}=6^{a+2}\end{array}\right.\\ x>-a\end{cases}$$



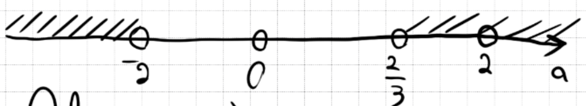
$f(-a)=1+\frac{2a}{-a-a}=0$

$\Rightarrow$ уравнение $1+\frac{2a}{x-a}=6^{3a-2}$ будет иметь 1 решение если $0<6^{3a-2}<1$
Больше одного корня это уравнение иметь не может
$\Rightarrow$ чтобы было два корня, нужно, чтобы выполнялось

$\begin{cases}0<6^{3a-2}<1\\ 0<6^{a+2}<1\end{cases}$
$\begin{cases}6^{3a-2}<6^0\\ 6^{a+2}<6^0\end{cases}$
$\begin{cases}3a-2<0\\ a+2<0\end{cases}$
$\begin{cases}a<\frac{2}{3}\\ a<-2\end{cases}$

$\Rightarrow$ при $a<-2$ будет 2 решения

Получаем:



Ответ: $(-\infty;-2)\cup\left(\frac{2}{3};2\right)\cup(2;+\infty)$.

#147 (ДЗ)

Ответа пока что нет

#148 (ДЗ)

Ответа пока что нет

#149 (ДЗ)

Ответа пока что нет

#150 (ДЗ)

Ответа пока что нет

#151 (ДЗ)

10. Задание 18 № 515786

Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение

$$a^2+11|x+2|+3\sqrt{x^2+4x+13}=5a+2|x-2a+2|$$

имеет хотя бы один корень.

Решение.

Пусть $t=x+2$, тогда уравнение примет вид: $a^2+11|t|+3\sqrt{t^2+9}=5a+2|t-2a|$. Пусть $f(t)=3\sqrt{t^2+9}+a^2-5a$, $g(t)=2|t-2a|-11|t|$. При $t>0$ функция $g(t)$ убывает от $g(0)$ до $-\infty$. При t < 0 функция $g(t)$ возрастает от $-\infty$ до $g(0)$. Поэтому максимальное значение функции $g(t)=g(0)=4|a|$.

Функция $f(t)$ принимает минимальное значение при $t=0: f(t)=a^2-5a+9$. Причем $f(t)$ возрастает на промежутке $(0;+\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty;0)$, принимая значения от $f(0)$ до ∞.

Чтобы было решение необходимо, чтобы $\max(g(t))\geq\min(f(t))$, то есть $4|a|\geq a^2-5a+9$. При $a\geq 0$ получаем $a^2-9a+9\leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{9-3\sqrt{5}}{2}\leq a\leq\dfrac{9+3\sqrt{5}}{2}$. При $a<0$ решений нет.

Ответ: $\left[\dfrac{9-3\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{9+3\sqrt{5}}{2}\right]$.

#152 (ДЗ)

18	$-\frac{7}{3}\leq a\leq\frac{31}{3}$

18 Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$3x^5+11x+4|x-a+3|+2|3x+a-5|+\sqrt[3]{4x+5}\leq 25$$

выполняется для всех значений $x\in[-4;-1]$.

#153 (ДЗ)

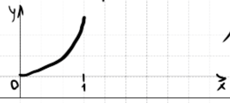
18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $f(x) = |2a+5|x$ имеет 6 решений, где f — чётная периодическая функция с периодом $T = 2$, определённая на всей числовой прямой, причём $f(x) = ax^2$, если $0 \le x \le 1$.

Источники:
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2015 (36 вар)

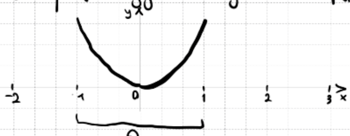
У нас есть уравнение $f(x) = |2a+5| \cdot x$
Будем решать его графически.

Как выглядит график левой части уравнения?
$f(x) = a \cdot x^2$
при $a>0$ график - парабола, ветви ↑
при $a<0$ график - парабола, ветви ↓
при $a=0$ график - прямая $y=0$

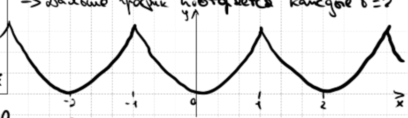
Если $a>0$, то $f(x) = ax^2$ - это квадратичная функция, график - парабола, ветви ↑
⇒ на отрезке $0 \le x \le 1$ график будет выглядеть так:



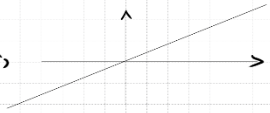
$f(x) = ax^2$ - чётная функция $f(-x) = a(-x)^2 = ax^2$
$f(x) = a \cdot x^2$
⇒ слева график будет выглядеть симметрично



Заметим, что длина отрезка от -1 до 1 равна 2
⇒ это и есть период $T=2$ из условия
⇒ дальше график повторяется каждые $T=2$



Как выглядит график правой части уравнения?
$y = |2a+5| \cdot x$
Если $|2a+5| > 0$, то график - возрастающая прямая, проходящая через начало координат
Если $|2a+5| = 0$, то график - горизонтальная прямая $y=0$



$$f(x) = |2a+5| \cdot x$$
$f(x) = ax^2$

График $f(x) = ax^2$ может выглядеть как: парабола с ветвями ↑ при $a>0$; парабола с ветвями ↓ при $a<0$; прямая $y=0$ при $a=0$

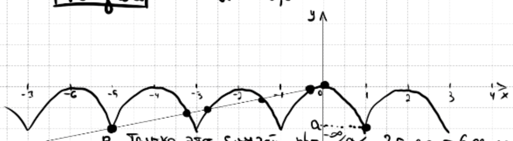
График $y = |2a+5|x$ может выглядеть как: возрастающая прямая при $a \ne -2{,}5$; прямая $y=0$ при $a=-2{,}5$

Рассмотрим 5 случаев.

① $-\infty < a < -2{,}5$ ② $a = -2{,}5$ ③ $-2{,}5 < a < 0$ ④ $a = 0$ ⑤ $a > 0$

$\boxed{1 \text{ случай}}$ $-\infty < a < -2{,}5$

$f(x) = |2a+5| \cdot x$
$f(x) = ax^2$



B $(-5; a)$
Только этот случай при $-\infty < a < -2{,}5$ даст 6 решений

$y = |2a+5| \cdot x$ должна проходить через точку B
$a = (-2a-5) \cdot (-5)$
$a = 10a + 25$
$-9a = 25$
$a = -\frac{25}{9}$

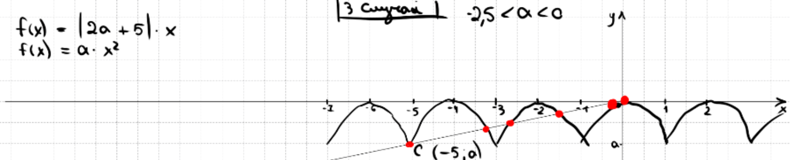
$\boxed{2 \text{ случай}}$ $a = -2{,}5$

$f(x) = |2a+5| \cdot x$
$f(x) = a \cdot x^2$

решений бесконечно много ⇒ $a \ne -2{,}5$

$\boxed{3 \text{ случай}}$ $-2{,}5 < a < 0$

$f(x) = |2a+5| \cdot x$
$f(x) = a \cdot x^2$

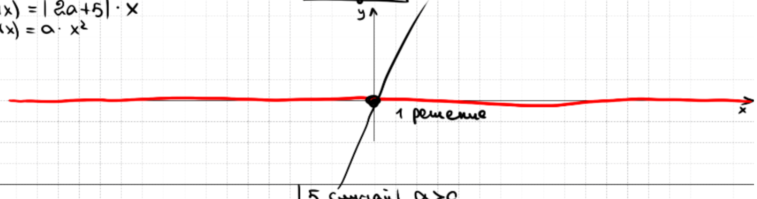


C $(-5; a)$

$y = |2a+5| \cdot x$
$a = (2a+5) \cdot (-5)$
$a = -10a - 25$
$11a = -25$
$a = \frac{-25}{11}$

$\boxed{4 \text{ случай}}$ $a = 0$

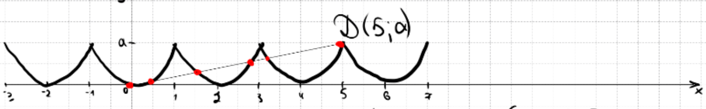
$f(x) = |2a+5| \cdot x$
$f(x) = a \cdot x^2$



1 решение

$\boxed{5 \text{ случай}}$ $a > 0$

$f(x) = |2a+5| \cdot x$
$f(x) = a \cdot x^2$



D $(5; a)$
Только этот случай при $a>0$ даст 6 решений

$y = |2a+5| \cdot x$
$a = (2a+5) \cdot 5$
$a = 10a + 25$
$-9a = 25$
$a = -\frac{25}{9}$ (не подходит под $a>0$)

Ответ: $\left\{-\frac{25}{9}; -\frac{25}{11}\right\}$

#154 (ДЗ)

1 **Задание 18 № 514715**

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|\log_5(x^2)-a|-|\log_5 x+2a|=(\log_5 x)^2$$

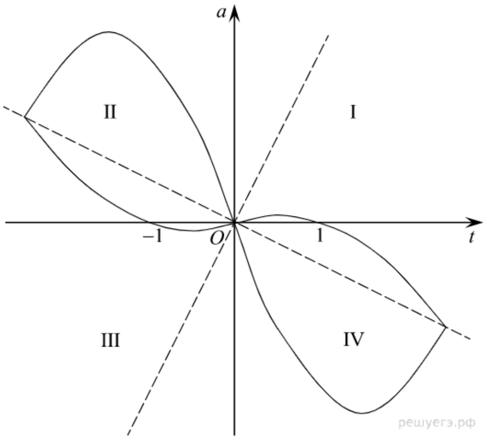
имеет ровно четыре решения.

Решение.

Сделаем замену $\log_5 x=t$. Получим уравнение $|2t-a|-|t+2a|=t^2$. При выполненной замене количество корней не изменяется (каждому значению переменной t соответствует ровно одно значение переменной x). Поэтому новое уравнение также должно иметь ровно 4 решения.

Построим график этого уравнения в плоскости tOa

Прямые $a=2t$ и $a=-\frac{t}{2}$ разбивают плоскость на четыре части (I, II, III и IV), в каждой из которых график уравнения $|2t-a|-|t+2a|=t^2$ представляет собой часть параболы.



В области I оба подмодульных выражения положительны и уравнение принимает вид

$$2t-a-t-2a=t^2 \Leftrightarrow a=-\frac{t^2-t}{3}$$

Графиком $a=-\frac{t^2-t}{3}$ является парабола с вершиной в точке с координатами $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{12}\right)$

В области II выражение $2t-a$ отрицательно, а выражение $t+2a$ положительно и уравнение принимает вид

$$-2t+a-t-2a=t^2 \Leftrightarrow a=-t^2-3t$$

Графиком $a=-t^2-3t$ является парабола с вершиной в точке с координатами $\left(-\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right)$

Для области III получим

$$-2t+a+t+2a=t^2 \Leftrightarrow a=\frac{t^2+t}{3}$$

Графиком $a=\frac{t^2+t}{3}$ является парабола с вершиной в точке с координатами $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{12}\right)$

Для области IV получим

$$2t-a+t+2a=t^2 \Leftrightarrow a=t^2-3t$$

Графиком $a=t^2-3t$ является парабола с вершиной в точке с координатами $\left(\frac{3}{2};-\frac{9}{4}\right)$

Количество корней определяется количеством точек пересечения графика уравнения с горизонтальной прямой.

При $a<-\frac{9}{4}$	уравнение не имеет корней,
при $a=-\frac{9}{4}$	уравнение имеет один корень,
при $-\frac{9}{4}<a<-\frac{1}{12}$	уравнение имеет два корня,
при $a=-\frac{1}{12}$	уравнение имеет три корня,
при $-\frac{1}{12}<a<0$	уравнение имеет четыре корня,
при $a=0$	уравнение имеет три корня,
при $0<a<\frac{1}{12}$	уравнение имеет четыре корня,
при $a=\frac{1}{12}$	уравнение имеет три корня,
при $\frac{1}{12}<a<\frac{9}{4}$	уравнение имеет два корня,
при $a=\frac{9}{4}$	уравнение имеет один корень,
при $a>\frac{9}{4}$	уравнение не имеет корней.

Ответ: уравнение имеет четыре корня при $-\frac{1}{12}<a<0$ и при $0<a<\frac{1}{12}$

Аналоги к заданию № 513272: 514715 Все

Источник: Типовые тестовые задания по математике, под редакцией И. В. Ященко 2016

Раздел кодификатора ФИПИ/Решу ЕГЭ: Координаты (x, a)

#155 (ДЗ)

19. Задание 18 № 510766

Найдите все значения a, при которых уравнение $|2\sin^2 x+8\cos x-3a| = 2\sin^2 x+7\cos x+3a$ имеет на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ единственный корень.

Решение.

Первый случай: $2\sin^2 x+8\cos x-3a \geq 0$. Тогда

$$2\sin^2 x+8\cos x-3a = 2\sin^2 x+7\cos x+3a \Leftrightarrow \cos x = 6a.$$

Последнее уравнение имеет на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ единственный корень при $-1 < 6a \leq 0$, откуда $-\frac{1}{6} < a \leq 0$.

Подставив $\cos x = 6a$ в неравенство $2\sin^2 x+8\cos x-3a \geq 0$, получим:

$$2-72a^2+48a-3a \geq 0 \Leftrightarrow 72a^2-45a-2 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{24} \leq a \leq \frac{2}{3}.$$

В этом случае уравнение $\cos x = 6a$ при условии $2\sin^2 x+8\cos x-3a \geq 0$ имеет на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ единственный корень $x = \arccos(6a)$ при $-\frac{1}{24} \leq a \leq 0$ и не имеет на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ корней при $a < -\frac{1}{24}$ и при $a > 0$.

Второй случай: $2\sin^2 x+8\cos x-3a < 0$. Тогда из исходного уравнения получаем:

$$2\sin^2 x+8\cos x-3a = -2\sin^2 x-7\cos x-3a \Leftrightarrow 4\sin^2+15\cos x = 0 \Leftrightarrow (4\cos x+1)(\cos x-4) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{4}.$$

Последнее уравнение имеет на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ единственный корень $x = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$. Подставив $x = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$ в неравенство $2\sin^2 x+8\cos x-3a < 0$, получим: $2\cdot\frac{15}{16}-8\cdot\frac{1}{4}-3a < 0$, откуда $a > -\frac{1}{24}$.

В этом случае уравнение $4\sin^2+15\cos x = 0$ при условии $2\sin^2 x+8\cos x-3a \geq 0$ имеет на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ единственный корень $x = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$ при $a > -\frac{1}{24}$ и не имеет на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ корней при $a \leq -\frac{1}{24}$.

Ответ: $a = -\frac{1}{24}$, $a > 0$

Дублирует задание 502098.

#156 (ДЗ)

4. $(-\infty;\ 0] \cup \{3\} \cup [5;\ +\infty)$.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для любого действительного значения x выполнено неравенство
$|\cos x + a^2 - 3a + 1| + |2\cos x + a^2 - 8a + 17| \leqslant 7\cos x + |2a^2 - 11a + 15| + 7.$

#157 (ДЗ)

1 **Задание 18 № 513282**

Найдите все неотрицательные значения a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$1 \le \frac{2a + x^2 - 4\log_{\frac{1}{3}}(4a^2 - 4a + 9)}{5\sqrt{18x^4 + 7x^2} + 2a + 4 + \log^2_{\frac{1}{3}}(4a^2 - 4a + 9)}$$

состоит из одной точки, и найдите это решение.

Решение.

Очевидно, если x подходит в это неравенство, то и $-x$ тоже подходит. Поэтому решение может быть единственным только в том случае, если это решение $x = 0$. Кроме того, при $x = 0$ неравенство должно обратиться в равенство, иначе при достаточно близких к нулю x неравенство продолжит выполняться (по непрерывности правой части на всей области определения). Итак,

$$1 = \frac{2a - 4\log_{\frac{1}{3}}(4a^2 - 4a + 9)}{2a + 4 + \log^2_{\frac{1}{3}}(4a^2 - 4a + 9)},$$

$$4 + \log^2_{\frac{1}{3}}(4a^2 - 4a + 9) = -4\log_{\frac{1}{3}}(4a^2 - 4a + 9),$$

$$(\log_{\frac{1}{3}}(4a^2 - 4a + 9) + 2)^2 = 0,$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(4a^2 - 4a + 9) = -2,$$

$$4a^2 - 4a + 9 = 9,$$

$$a = 0 \text{ или } a = 1.$$

Рассмотрим эти случаи. При $a = 1$ имеем $1 \le \frac{x^2 + 10}{5\sqrt{18x^4 + 7x^2} + 10}$. Решим это неравенство. Поскольку знаменатель положителен, умножим на него.

$$5\sqrt{18x^4 + 7x^2} + 10 \le x^2 + 10,$$

$$25(18x^4 + 7x^2) \le x^4,$$

$$449x^4 + 175x^2 \le 0.$$

$x = 0$. Итак, $a = 1$ подходит.

При $a = 0$ имеем $1 \le \frac{x^2 + 8}{5\sqrt{18x^4 + 7x^2} + 8}$. Решим это неравенство. Поскольку знаменатель положителен, умножим на него.

$$5\sqrt{18x^4 + 7x^2} + 8 \le x^2 + 8,$$

$$25(18x^4 + 7x^2) \le x^4,$$

$$449x^4 + 175x^2 \le 0.$$

$x = 0$. Итак, $a = 0$ тоже подходит.

Ответ: $a = 0$, $a = 1$. При этом $x = 0$.

Аналоги к заданию № 513268: 513282 Все

Источник: Типовые тестовые задания по математике, под редакцией И. В. Ященко 2016

Раздел кодификатора ФИПИ/Решу ЕГЭ: Симметрия в решениях

#158 (ДЗ)

5. Задание 18 № 510806

Найдите все значения a, при которых любое решение уравнения

$$4\sqrt[3]{3,5x-2,5}+3\log_2(3x-1)+2a=0$$

принадлежит отрезку $[1;\,3]$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x)=4\sqrt[3]{3,5x-2,5}+3\log_2(3x-1)+2a$. Она определена при $x>\frac{1}{3}$, возрастает на области определения и принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Значит, уравнение $f(x)=0$ имеет единственное решение. Это решение принадлежит отрезку $[1;\,3]$ тогда и только тогда, когда $f(1)\le 0$ и $f(3)\ge 0$. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 4+3+2a\le 0, \\ 8+9+2a\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+7\le 0, \\ 2a+17\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{17}{2}\le a\le -\frac{7}{2}.$$

Ответ: $\left[-\frac{17}{2};\,-\frac{7}{2}\right]$.

Дублирует задание 505244.

#159 (ДЗ)

18	$-\frac{\sqrt{13}\pi}{3}<a<\frac{\sqrt{13}\pi}{3}$

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sin 2\sqrt{2\pi x-x^2+\frac{a^2}{4}}+\cos\sqrt{2\pi x-x^2+\frac{a^2}{4}}=0$$

имеет ровно два решения.

#160 (ДЗ)

18	$-\frac{7}{3}<a<-1;\ 1<a<\frac{7}{3}$

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sin\sqrt{\pi ax-x^2}+\cos 2\sqrt{\pi ax-x^2}=0$$

имеет ровно два решения.

#161 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых множество значений функции $y=\dfrac{\sqrt{a}-2\cos x+1}{\sin^2 x+a+2\sqrt{a}+1}$ содержит отрезок $[2;\,3]$.

2	$a=0$

#162 (ДЗ)

Задание 18 № 530438

Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2+10=2(x+3y), \\ a^2+2ax+ay=-6 \end{cases}$$

имеет решение.

Решение.

Преобразуем первое уравнение системы:

$$x^2-2x+1+y^2-6y+9=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=0.$$

Данное уравнение имеет только одно решение: $x=1,\ y=3$. Подставим данные значения во второе уравнение системы:

$$a^2+5a+6=0.$$

Следовательно, $a=-3,\ a=-2.$

Ответ: $a=-3,\ a=-2.$

Аналоги к заданию № 530406: 530438 Все

Спрятать решение · Прототип задания · В избранное (3) · Поделиться · Видеокурс · Курс Д. Д. Гущина · Сообщить об ошибке · Помощь

#163 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \left((x-2)^2+(y-3)^2\right)\left((x-8)^2+(y-2)^2\right)\le 0, \\ (x-2a)^2+(y-a)^2\le 4a^2 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Решение.

Первое неравенство имеет ровно два решения: $(2;3)$, $(8;2)$. Следовательно, данная система имеет ровно одно решение тогда и только тогда, когда второму неравенству удовлетворяет только одно из решений первого неравенства.

Найдём все значения a, при которых справедлива каждая из систем:

$$\begin{cases} (2-2a)^2+(3-a)^2\le 4a^2, \\ (8-2a)^2+(2-a)^2>4a^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (2-2a)^2+(3-a)^2>4a^2, \\ (8-2a)^2+(2-a)^2\le 4a^2. \end{cases}$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases} (2-2a)^2+(3-a)^2\le 4a^2, \\ (8-2a)^2+(2-a)^2>4a^2; \end{cases} \quad \begin{cases} (a-1)(a-13)\le 0, \\ (a-2)(a-34)>0. \end{cases}$$

Получаем $1\le a<2$.

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} (2-2a)^2+(3-a)^2>4a^2, \\ (8-2a)^2+(2-a)^2\le 4a^2; \end{cases} \quad \begin{cases} (a-1)(a-13)>0, \\ (a-2)(a-34)\le 0. \end{cases}$$

Получаем $13<a\le 34$.

Ответ: $[1;2)$; $(13;34]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены не все значения a	2
Задача верно сведена к исследованию возможных значений корней системы уравнений	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

#164 (ДЗ)

6. Задание 18 № 520850

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ax^2+ay^2-(4a-6)x+4ay+1=0, \\ x^2+y=xy+x \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение.

Второе уравнение приводится к виду $(x-1)(x-y)=0$, откуда $x=1$ или $y=x$.

При $a=0$ исходная система имеет одно решение.

При $a\neq 0$ при подстановке в первое уравнение системы $x=1$ или $y=x$ получаются квадратные уравнения. Значит исходная система уравнений имеет ровно четыре различных решения тогда и только тогда, когда каждое из этих уравнений имеет ровно два корня и пара чисел $(1;1)$ не является решением исходной системы.

При $x=1$ получаем:

$$ay^2+4ay+7-3a=0.$$

Это квадратное уравнение имеет ровно два корня при положительном дискриминанте:

$$16a^2+12a^2-28a>0 \Leftrightarrow a^2-a>0,$$

откуда $a<0;\ a>1.$

При $y=x$ получаем:

$$2ax^2+6x+1=0.$$

Это квадратное уравнение имеет два корня при положительном дискриминанте:

$$36-8a>0,$$

откуда, учитывая условие $a\neq 0$, получаем $a<0$ и $0<a<\frac{9}{2}$.

Пара числе $(1;1)$ является решением исходной системы при $2a+7=0$, то есть при $a=-\frac{7}{2}$.

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно четыре решения при $a<-\frac{7}{2};\ -\frac{7}{2}<a<0;\ 1<a<\frac{9}{2}$.

Ответ: $a<-\frac{7}{2};\ -\frac{7}{2}<a<0;\ 1<a<\frac{9}{2}$.

#165 (ДЗ)

С. 1. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^4-y^4=10a-24 \\ x^2+y^2=a \end{cases}$$

уравнений имеет ровно четыре различных решения.

$(2;4)\cup(6;+\infty)$

#166 (ДЗ)

18	$a = 3{,}5$

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} -x-3y+2z=x^2+3y^2 \\ x-3y-4z=a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

#167 (ДЗ)

Задание 18 № 520919

Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x+ay-4)(x+ay-4a)=0, \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение.

При $a=1$ первое уравнение системы задаёт прямую $x+y=4$, а при $a \neq 1$ пару параллельных прямых l_1 и l_2, заданных уравнениями $x+ay=4$ и $x+ay=4a$ соответственно.

Второе уравнение системы задает окружность ω радиусом 3 с центром в точке (0; 0).

Прямая и окружность имеют не более двух общих точек. Значит, исходная система уравнений имеет ровно 4 решения, когда $a \neq 1$ и окружность ω пересекается с каждой из прямых l_1 и l_2 в двух точках.

Число точек пересечения окружности ω с прямой l_1 равно числу корней квадратного уравнения:

$$(4-ay)^2+y^2=9;\ (a^2+1)y^2-8ay+7=0.$$

Это уравнение имеет ровно два корня при положительном дискриминанте:

$$64a^2-28\left(a^2+1\right)>0;\ 9a^2-7>0;\ (3a-\sqrt{7})(3a+\sqrt{7})>0,$$

откуда $a<-\dfrac{\sqrt{7}}{3};\ a>\dfrac{\sqrt{7}}{3}.$

Число точек пересечения окружности ω с прямой l_2 равно числу корней квадратного уравнения:

$$(4a-ay)^2+y^2=9;\ (a^2+1)y^2-8a^2y+16a^2-9=0.$$

Это уравнение имеет ровно два корня при положительном дискриминанте:

$$64a^2-4\left(a^2+1\right)\left(16a^2-9\right)>0;\ 9-7a^2>0;\ (\sqrt{7}a-3)(\sqrt{7}a+3)<0,$$

откуда $-\dfrac{3\sqrt{7}}{7}<a<\dfrac{3\sqrt{7}}{7}.$

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно четыре решения при $-\dfrac{3\sqrt{7}}{7}<a<-\dfrac{\sqrt{7}}{3};\ \dfrac{\sqrt{7}}{3}<a<1;\ 1<a<\dfrac{3\sqrt{7}}{7}.$

Ответ: $-\dfrac{3\sqrt{7}}{7}<a<-\dfrac{\sqrt{7}}{3};\ \dfrac{\sqrt{7}}{3}<a<1;\ 1<a<\dfrac{3\sqrt{7}}{7}.$

#168 (ДЗ)

2. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-(3-a))^2+(y-2a)^2=9 \\ y^2=x^2 \end{cases}$$

$(1-\sqrt{2};0)\cup(0;1.2)\cup(1.2;3\sqrt{2}-3)$

уравнений имеет ровно четыре различных решения.

#169 (ДЗ)

6. Задание 18 № 520857

Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+2(a-3)x-4ay+5a^2-6a=0, \\ y^2=x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение.

Первое уравнение системы равносильно уравнению $(x+a-3)^2+(y-2a)^2=9$. Это уравнение задает окружность ω радиусом 3 с центром в точке $(3-a;\,2a)$. Второе уравнение системы задает пару прямых $y=x$ и $y=-x$, пересекающихся в точке $(0;\,0)$.

Прямая и окружность имеют не более двух общих точек. Значит, исходная система уравнений имеет ровно четыре различных решения тогда и только тогда, когда окружность ω пересекается с каждой из прямых $y=x$ и $y=-x$, в двух точках и не проходит через точку их пересечения $(0;\,0)$.

Число точек пересечения окружности с прямой $y=x$ равно числу корней квадратного уравнения

$$2x^2-2(a+3)x+5a^2-6a=0.$$

Это уравнение имеет ровно два корня при положительном дискриминанте:

$$4(a+3)^2-8(5a^2-6a)>0 \Leftrightarrow a^2-2a-1<0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}.$$

Число точек пересечения окружности с прямой $y=-x$ равно числу корней квадратного уравнения

$$2x^2-2(3a-3)x+5a^2-6a=0.$$

Это уравнение имеет ровно два корня при положительном дискриминанте:

$$4(3a-3)^2-8(5a^2-6a)>0 \Leftrightarrow a^2+6a-9<0 \Leftrightarrow -3-3\sqrt{2}<a<-3+3\sqrt{2}.$$

Окружность проходит через точку $(0;\,0)$ при $5a^2-6a=0$, то есть при $a=0$ и $a=1,2$.

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно 4 решения при:

$$1-\sqrt{2}<a<0;\quad 0<a<1,2;\quad 1,2<a<-3+3\sqrt{2}.$$

Ответы: $1-\sqrt{2}<a<0;\quad 0<a<1,2;\quad 1,2<a<-3+3\sqrt{2}.$

#170 (ДЗ)

1 **Задание 18 № 520963**

Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y=(a+1)x^2+2ax+a-1 \\ y^2=x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение.

Из второго уравнения следует, что $y=\pm x$. Рассмотрим два случая, подставив значение y в первое уравнение системы.

1) Если $y=x$, имеем:

$$(a+1)x^2+(2a-1)x+a-1=0.$$

Если $a=-1$, то $x=-\frac{2}{3}$.

Если $a\neq-1$, имеем квадратное уравнение относительно x. Требуем положительности его дискриминанта для поолучения 2 различных корней:

$$(2a-1)^2-4(a^2-1)>0\Leftrightarrow a<\frac{5}{4}.$$

2) Если $y=-x$, имеем:

$$(a+1)x^2+(2a+1)x+a-1=0.$$

Если $a=-1$, то $x=-2$.

Если $a\neq-1$, имеем квадратное уравнение относительно x. Требуем положительности его дискриминанта для поолучения 2 различных корней:

$$(2a+1)^2-4(a^2-1)>0\Leftrightarrow a>-\frac{5}{4}.$$

Также важно проверить, чтобы корни уравнений из первого и второго случая не совпадали:

$$(a+1)x^2+(2a-1)x+a-1=(a+1)x^2+(2a+1)x+a-1\Leftrightarrow x=0.\text{ Тогда } a\neq 1.$$

Пересекая полученные открытые лучи из первого и второго случая получаем итоговый ответ:

$$-\frac{5}{4}<a<-1,\ -1<a<1,\ 1<a<\frac{5}{4}.$$

Ответ: $\left(-\frac{5}{4};-1\right)\cup(-1;1)\cup\left(1;\frac{5}{4}\right)$.

Аналоги к заданию № 521009: 520963 Все

Спрятать решение · Прототип задания · В избранное (0) · Поделиться · Сообщить об ошибке · Помощь

Спрятать решение · В избранное (15) · Поделиться · Сообщить об ошибке · Помощь

#171 (ДЗ)

1 **Задание 18 № 526906**

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a(x^2+y^2)-ax+(a-3)y+1=0, \\ xy-1=y-x \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение.

Второе уравнение системы приведем к виду $(x-1)(y+1)=0$. То есть $\left[\begin{array}{l} x=1, \\ y=-1. \end{array}\right.$

Рассмотрим два случая, подставив эти значения в первое уравнение системы.

1) $x=1$:

$$a(1+y^2)-a+(a-3)y+1=0 \Leftrightarrow ay^2+(a-3)y+1=0.$$

Если $a=0$, имеем: $y=\dfrac{1}{3}$.

Если $a \neq 0$, имеем квадратное уравнение относительно y. Его дискриминант должен быть положительным, ведь нам нужно два различных корня.

$$(a^2-6a+9)-4a>0 \Leftrightarrow a^2-10a+9>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1, \\ x>9. \end{array}\right.$$

1) $y=-1$:

$$a(1+x^2)-ax-a+3+1=0 \Leftrightarrow (a)x^2-ax+4=0.$$

Если $a=0$, имеем: $4=0$.

Если $a \neq 0$, имеем квадратное уравнение относительно x. Его дискриминант должен быть положительным, ведь нам нужно два различных корня.

$$a^2-16a>0 \Leftrightarrow a(a-16)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a>16, \\ a<0. \end{array}\right.$$

Пересекая полученные промежутки из первого и второго случаев, получаем итоговый ответ: $a<0$, $a>16$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (16; +\infty)$.

Аналоги к заданию № 526905: 526906 Все

Источник: Типовые тестовые задания по математике под редакцией И.В. Ященко, 2019.

Спрятать решение · Прототип задания · В избранное (0) · Поделиться · Сообщить об ошибке · Помощь

#172 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ 2xy=3a^2-4a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a=1$; $a=2$.

#173 (ДЗ)

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(x-3a+1)^2+(y+2a)^2=a-1,\\ 4x+3y=a+1\end{cases}$$

имеет более одного решения.

Решение.
Если $a<1$, то система не имеет решений.
Пусть $a=1$. Тогда имеем систему

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y+2)^2=0,\\ 4x+3y=2.\end{cases}$$

Первому уравнению удовлетворяет только одна пара $(2,-2)$, которая также удовлетворяет второму уравнению системы, поэтому при $a=1$ система имеет единственное решение.
Пусть $a>1$. Решения первого уравнения системы лежат на окружности с центром в точке $(3a-1,-2a)$ и радиусом $\sqrt{a-1}$. Решения второго уравнения — точки прямой $4x+3y=a+1$. Следовательно, система имеет более одного решения тогда и только тогда, когда расстояние от центра окружности $(3a-1,-2a)$ до прямой $4x+3y=a+1$ меньше радиуса $\sqrt{a-1}$ данной окружности. Получаем систему:

$$\begin{cases}\dfrac{|4(3a-1)+3(-2a)-a-1|}{\sqrt{4^2+3^2}}<\sqrt{a-1},\\ a>1;\end{cases} \quad \begin{cases}|5a-5|<5\sqrt{a-1},\\ a>1;\end{cases} \quad 1<a<2.$$

Следовательно, система имеет более одного решения при $1<a<2$.
Ответ: $(1;2)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получено одно значение a	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямой и окружности (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

#176 (ДЗ)

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2+2(y-x)a=1+2a-a^2, \\ x^2+y^2+2(x-y)a=1-2a-a^2 \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение.

Запишем систему в виде

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y+a)^2=(a+1)^2, \\ (x+a)^2+(y-a)^2=(1-a)^2. \end{cases}$$

Если $a \neq -1$, $a \neq 1$, то каждое уравнение системы есть уравнение окружности. В этом случае система не имеет решений тогда и только тогда, когда расстояние между центрами этих окружностей больше суммы или меньше модуля разности их радиусов.

При $a=-1$ получаем систему

$$\begin{cases} (x+1)^2+(y-1)^2=0, \\ (x-1)^2+(y+1)^2=4. \end{cases}$$

Эта система решений не имеет. Следовательно, $a=-1$ удовлетворяет условию задачи.

При $a=1$ получаем систему

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2=4, \\ (x+1)^2+(y-1)^2=0. \end{cases}$$

Эта система тоже решений не имеет. Следовательно, $a=1$ тоже удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a \neq -1, a \neq 1$. Расстояние O_1O_2 между центрами $O_1(a, -a)$ и $O_2(-a, a)$ равно $O_1O_2=\sqrt{4a^2+4a^2}=2\sqrt{2}|a|$, а радиусы $R_1=|a+1|$ и $R_2=|1-a|$. Решим два неравенства:

$$O_1O_2 > R_1+R_2 \text{ или } O_1O_2 < |R_1-R_2|.$$

Получаем $2\sqrt{2}|a| > |a+1|+|1-a|$ или $2\sqrt{2}|a| < ||a+1|-|1-a||$; откуда $a < -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $a > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
Начато верное рассуждение и даже получено одно какое-нибудь значение параметра, но до конца задача не доведена	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямой и окружностей (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

#177 (ДЗ)

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 3x^2+3y^2=10xy, \\ (x-a)^2+(y-a)^2=10a^4 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

Решение.
Первое уравнение системы раскладывается на множители: $(x-3y)(y-3x)=0$. Следовательно, уравнение задаёт пару прямых $x=3y$ и $y=3x$.
Второе уравнение при каждом $a\neq 0$ — уравнение окружности с центром (a, a) и радиусом $a^2\sqrt{10}$.

Если $a=0$, то система имеет единственное решение и поэтому не удовлетворяет условию задачи.
Если $a\neq 0$, то условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда окружность касается каждой из прямых, то есть расстояние от центра до каждой из прямых равно радиусу окружности. Получаем уравнение $\frac{|a-3a|}{\sqrt{10}}=a^2\sqrt{10}$. Отсюда $a=\pm 0,2$.
Ответ: $a=\pm 0,2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены не все значения a	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

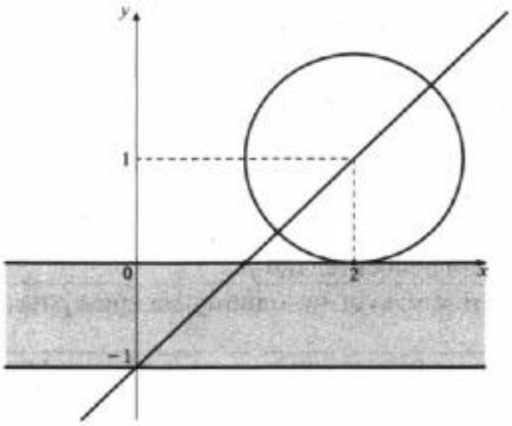
#178 (ДЗ)

20 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y(y+1)\le 0, \\ 3x^2+3y^2-6a(x+y)+5a^2-6x+4a+3=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.



Выделим в уравнении системы полные квадраты:

$$3x^2-6ax+3a^2+3y^2-6ay+3a^2-6x+4a+3-a^2=0;$$

$$3(x-a)^2+3(y-a)^2-6(x-a)+3-2a-a^2=0.$$

Ещё раз выделим полный квадрат:

$$3(x-a)^2-6(x-a)+3+3(y-a)^2=a^2+2a;$$

$$(x-a-1)^2+(y-a)^2=\frac{a^2+2a}{3}.$$

Уравнение определяет окружность с центром $(a+1;a)$ и радиусом $\sqrt{\dfrac{a^2+2a}{3}}$.

Неравенство $y(y+1)\le 0$ определяет горизонтальную полосу $-1\le y\le 0$. На рисунке видно, что единственное решение получается в двух случаях.

1. Окружность касается полосы внешним образом. Это происходит тогда и только тогда, когда центр расположен вне полосы, а её радиус равен расстоянию от центра до ближайшей границы полосы:

$$\begin{cases} a<-1, \\ (a+1)^2=\dfrac{a^2+2a}{3} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a>0, \\ a^2=\dfrac{a^2+2a}{3}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} a<-1, \\ 2a^2+4a+3=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a>0, \\ 2a^2-2a=0. \end{cases}$$

Первая система не имеет решений. Вторая система имеет решение $a=1$.

2. Окружность превращается в точку и при этом принадлежит полосе:

$$\begin{cases} -1\le a\le 0, \\ a^2+2a=0, \end{cases} \text{ откуда } a=0.$$

Ответ: 0; 1.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получены все верные значения параметра, но в ответ включены также и одно-два неверных значения.	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра.	2
Задача верно сведена к исследованию совокупности трёх квадратных уравнений относительно a.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

#179 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} ax^2-2(a+1)x+a+5\le 0, \\ (a+1)x^2-2(a+2)x+a+2\ge 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Решение системы может быть единственным в двух случаях.

Случай 1. Единственное решение является граничной точкой для множества решений каждого из двух неравенств. В этом случае это единственное решение должно удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} ax^2-2(a+1)x+a+5=0, \\ (a+1)x^2-2(a+2)x+a+2=0. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем

$$x^2-2x-3=0\text{, откуда } x=-1 \text{ или } x=3.$$

Если $x=-1$, то $a+1+2(a+2)+a+2=0$, а значит, $a=-\frac{7}{4}$. При этом значении a система принимает вид

$$\begin{cases} -7x^2+6x+13\le 0, \\ -3x^2-2x+1\ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\le -1 \text{ или } x\ge \frac{13}{7}, \\ -1\le x\le \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Единственное решение: $x=-1$.

Если $x=3$, то $9(a+1)-6(a+2)+a+2=0$, откуда $a=\frac{1}{4}$. Получаем

$$\begin{cases} x^2-10x+21\le 0, \\ 5x^2-18x+9\ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3\le x\le 7, \\ x\le \frac{3}{5} \text{ или } x\ge 3, \end{cases} \quad 3\le x\le 7.$$

При этом значении a система имеет бесконечно много решений.

Случай 2. Одно из неравенств имеет единственное решение, удовлетворяющее другому неравенству.

Первое неравенство имеет единственное решение при

$$\begin{cases} (a+1)^2-a(a+5)=0, \\ a>0, \end{cases} \quad \text{откуда } a=\frac{1}{3}.$$

Первое неравенство имеет единственное решение $x=4$, которое удовлетворяет второму неравенству.

Второе неравенство имеет единственное решение при

$$\begin{cases} (a+2)^2-(a+1)(a+2)=0, \\ a<-1, \end{cases} \quad \text{откуда } a=-2.$$

Второе неравенство имеет единственное решение $x=0$, которое не удовлетворяет первому неравенству.

Ответ: $a=-\frac{7}{4}$, $a=\frac{1}{3}$.

#180 (ДЗ)

Задание 18 № 520873

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^4+y^2=a^2, \\ x^2+y=|5a-12| \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение.

Исходная система равносильна системе уравнений:

$$\begin{cases} x^4+\left(|5a-12|-x^2\right)^2=a^2, \\ y=|5a-12|-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^4-2|5a-12|x^2+24a^2-120a+144=0, \\ y=|5a-12|-x^2. \end{cases}$$

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно четыре различных решения тогда и только тогда, когда биквадратное уравнение

$$2x^4-2|5a-12|x^2+24a^2-120a+144=0$$

имеет ровно четыре различных корня. Это выполняется, когда квадратное уравнение

$$2t^2-2|5a-12|t+24a^2-120a+144=0$$

имеет ровно два положительных корня.

Чтобы полученное квадратное уравнение имело два корня, его дискриминант должен быть положительным:

$$4(5a-12)^2-8(24a^2-120a+144)>0 \Leftrightarrow 23a^2-120a+144<0 \Leftrightarrow (23a-60-12\sqrt{2})(23a-60+12\sqrt{2})<0,$$

откуда $\dfrac{60-12\sqrt{2}}{23}<a<\dfrac{60+12\sqrt{2}}{23}$.

Чтобы корни полученного квадратного уравнения были одного знака, свободный член этого уравнения должен быть положительным:

$$24a^2-120a+144>0 \Leftrightarrow (a-2)(a-3)>0,$$

откуда $a<2;\ \ a>3$.

Чтобы корни квадратного уравнения были положительными, коэффициент при t должен быть отрицательным, то есть $a\neq\dfrac{12}{5}$.

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно четыре решения при $\dfrac{60-12\sqrt{2}}{23}<a<2$ и $3<a<\dfrac{60+12\sqrt{2}}{23}$.

Ответ: $\dfrac{60-12\sqrt{2}}{23}<a<2;\ 3<a<\dfrac{60+12\sqrt{2}}{23}$.

Источник: ЕГЭ по математике 01.06.2018. Основная волна. Дальний Восток. (С часть)., Задания 18 (С6) ЕГЭ 2018

Методы алгебры: Перебор случаев

Спрятать решение · В избранное (58) · Поделиться · ▶ Курс 80 баллов · ▶ Курс Д. Д. Гущина · Сообщить об ошибке · Помощь

#181 (ДЗ)

18	$0<a<\dfrac{4}{9};\ a>1$

18. **Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений**

$$\begin{cases} (ay+ax-2)(y+x+3a)=0, \\ |xy|=a \end{cases}$$

имеет ровно шесть решений.

#182 (ДЗ)

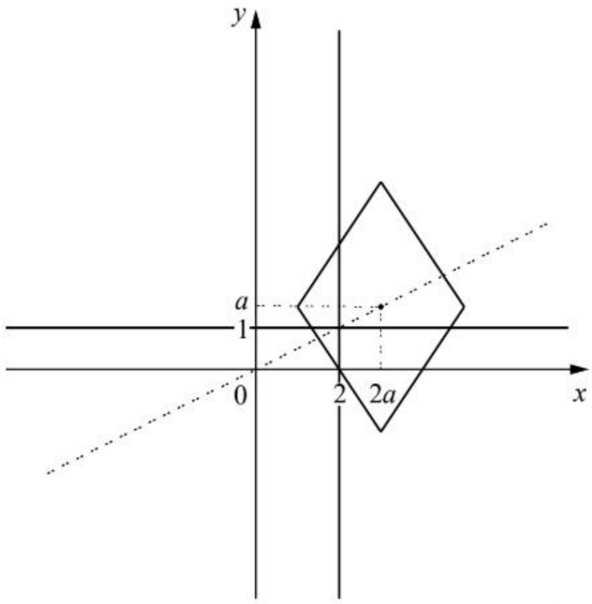
18 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3|x-2a|+2|y-a|=6, \\ xy-x-2y+2=0 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение.

Первое уравнение задаёт на координатной плоскости ромб с диагоналями 4 и 6, параллельными осям Ox и Oy соответственно, и с центром в точке $(2a;a)$. Второе уравнение задаёт две прямые $x=2$ и $y=1$.



Система имеет ровно три решения в одном из двух случаев: либо одна из прямых пересекает ромб в двух точках, а вторая проходит через только одну из его вершин, либо точка пересечения прямых лежит на стороне ромба, но не в его вершине. Рассмотрим эти случаи по отдельности.

1. Если нижняя или верхняя вершина лежит на прямой $y=1$, то $a=1+3=4$ или $a=1-3=-2$. Центр ромба удалён от прямой $x=2$ на 6, поэтому прямая $x=2$ не пересекает ромб.

Если левая или правая вершина лежит на прямой $x=2$, то $a=\frac{2+2}{2}=2$ или $a=\frac{2-2}{2}=0$, а центр ромба удалён от прямой $y=1$ на 1, поэтому прямая $y=1$ пересекает ромб в двух точках.

2. Точка пересечения прямых не должна совпасть с вершиной ромба, то есть $a\neq1$. Подставим $x=2$, $y=1$ в уравнение:

$$8|a-1|=6, \text{ откуда } a=\frac{1}{4} \text{ или } a=\frac{7}{4}.$$

Оба значения удовлетворяют условию $a\neq1$, а потому при каждом из этих значений a система имеет ровно три решения.

Ответ: 0; $\frac{1}{4}$; $\frac{7}{4}$; 2.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но из-за арифметической ошибки одно из них неверно	3
Рассмотрен только один из двух возможных случаев взаимного расположения двух прямых и ромба: когда точка пересечения прямых лежит на стороне ромба или когда одна прямая проходит через вершину ромба, а вторая пересекает ромб в двух точках. ИЛИ Не исключен случай, когда точка пересечения прямых лежит в вершине ромба	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения двух прямых и ромба	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

#183 (ДЗ)

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y+2-\dfrac{4}{x}=\left|y+\dfrac{2}{x}-3\right|, \\ 2y(y+2)+3x(ax-2)=xy(2a+3) \end{cases}$$

имеет больше трёх решений.

$$\boxed{\left(-\frac{25}{16}; -1{,}5\right);\ (-1{,}5; 0);\ \left(0; 3\frac{1}{6}\right);\ \left(3\frac{1}{6}; +\infty\right)}$$

#184 (ДЗ)

$(3; 4] \cup [10; 11)$

#185 (ДЗ)

№18 Досрочный ЕГЭ 30.03.18 Москва.

Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases}(x^2+y^2+10x)\ln\left(\dfrac{4x+3y+a}{50}\right)=0\\ (x^2+y^2+10x)(x^2+y^2-16x)=0\end{cases}$

имеет ровно два различных решения.

Решение.

$$\begin{cases}(x^2+y^2+10x)\ln\left(\dfrac{4x+3y+a}{50}\right)=0\\ (x^2+y^2+10x)(x^2+y^2-16x)=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+y^2+10x=0\\ 4x+3y+a>0\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{4x+3y+a}{50}=1\\ x^2+y^2-16x=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}(x+5)^2+y^2=25\\ y>-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{a}{3}\end{cases} & (1)\\ \begin{cases}4x+3y+a-50=0\\ (x-8)^2+y^2=64\end{cases} & (2)\end{array}\right.$$

1)Рассмотрим систему (1): $\begin{cases}(x+5)^2+y^2=25\\ y>-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{a}{3}\end{cases}$

Уравнение системы задает окружность с центром $O_1(-5;0)$, радиусом $R_1=5$.

Неравенство системы задает открытую полуплоскость с границей $y=-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{a}{3}$.

Если окружность располагается под прямой $y=-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{a}{3}$ или прямая касается окружности сверху, то система решений не имеет. Если прямая пересекает окружность в двух точках или окружность расположена выше прямой или касается снизу прямой , то система имеет бесконечно много решений. Найдем при каких значениях a прямая касается окружности.

В этом случае $\rho(O_1,l)=R_1$, где l: $4x+3y+a=0$. $\dfrac{|-20+a|}{\sqrt{4^2+3^2}}=5$; $|a-20|=25$; $a_1=45$; $a_2=-5$.

При $a=45$ – нижнее касание, а при $a=-5$ – верхнее.

Т. е. при $a>-5$ система(1) имеет бесконечно много решений, при $a\le -5$ – решений нет.

2)Рассмотрим систему (2): $\begin{cases}4x+3y+a-50=0\\ (x-8)^2+y^2=64\end{cases}$

Первое уравнение системы задает семейство прямых. Второе уравнение – окружность с центром $O_2(8;0)$, радиусом $R_2=8$. Система будет иметь два решения, если расстояние от O_2до прямой меньше R_2, т. е. $\dfrac{|32+a-50|}{\sqrt{4^2+3^2}}<8$; $|a-18|<40$; $-22<a<58$.

Объединив результаты пунктов 1 и 2 получим, что при $a\in(-22;-5]$ данная система имеет ровно два различных решения.

Ответ: $(-22;-5]$

#186 (ДЗ)

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}\sqrt{(x-a)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-a)^2}=\left|a\sqrt{2}\right|,\\ x^2+y^2\le 18\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Уравнение

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-a)^2}=\left|a\sqrt{2}\right|$$

означает, что сумма расстояний от точки $(x;y)$ до точек $(a;0)$ и $(0;a)$ равна $\left|a\sqrt{2}\right|$, но эта сумма расстояний всегда больше, чем $\left|a\sqrt{2}\right|$, если только точка $(x;y)$ не лежит на отрезке с концами $(a;0)$ и $(0;a)$. Значит, множество решений при $a\ne 0$ — это отрезок с концами $(a;0)$ и $(0;a)$. При $a=0$ множество решений — это $x=0$, $y=0$.

Множество решений неравенства $x^2+y^2\le 18$ — круг на плоскости с координатами $(x;y)$ с центром в начале координат и радиусом $3\sqrt{2}$. Отсюда получаем необходимое условие существования единственного решения — отрезок с концами $(a;0)$ и $(0;a)$ должен пересекаться с данным кругом по единственной точке. Это возможно при $a=0$ (когда отрезок превращается в точку), а также когда отрезок касается границы круга. Из симметрии точка касания лежит в середине этого отрезка. Расстояние от середины отрезка до начала координат равно $\frac{\sqrt{2}|a|}{2}$. В случае касания это расстояние должно совпадать с радиусом круга, откуда получаем уравнение $3\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}|a|}{2}$, $|a|=6$, $a=\pm 6$. Таким образом, система имеет единственное решение при $a=0$, $a=6$ и $a=-6$.

Ответ: $a=0$; $a=6$; $a=-6$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, но не включена точка $a=0$	3
С помощью верного рассуждения получено одно значение a	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения отрезка и круга (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4