ПОСОБИЕ ПРОШЛО НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКУЮ ОЦЕНКУ ФГБНУ

ФИПИ

ШКОЛЕ

ПРОЕКТ С УЧАСТИЕМ РАЗРАБОТЧИКОВ КИМ ЕГЭ

2023

ЕГЭ

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ТИПОВЫЕ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВАРИАНТЫ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ И. В. ЯЩЕНКО

АВ 1965237

36 ВАРИАНТОВ

Онлайн поддержка

ПОСОБИЕ ПРОШЛО НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКУЮ ОЦЕНКУ ФГБНУ

ФИПИ ШКОЛЕ

2023

ПРОЕКТ С УЧАСТИЕМ РАЗРАБОТЧИКОВ КИМ ЕГЭ

ЕГЭ

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ТИПОВЫЕ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВАРИАНТЫ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ И. В. ЯЩЕНКО

36 ВАРИАНТОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
НАЦИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ
Москва
2023

Содержание

Карта индивидуальных достижений обучающегося

Впишите баллы, полученные Вами при выполнении типовых экзаменационных вариантов, в таблицу.

Вариант / Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1																		
2																		
3																		
4																		
5																		
6																		
7																		
8																		
9																		
10																		
11																		
12																		
13																		
14																		
15																		
16																		
17																		
18																		
Сумма баллов																		

Задание \ Вариант	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
1																		
2																		
3																		
4																		
5																		
6																		
7																		
8																		
9																		
10																		
11																		
12																		
13																		
14																		
15																		
16																		
17																		
18																		
Сумма баллов																		

Введение

Сборник предназначен для подготовки к единому государственному экзамену по математике и содержит 36 полных вариантов, составленных в соответствии с проектом демоверсии КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня. Варианты подготовлены специалистами федеральной комиссии разработчиков контрольных измерительных материалов ЕГЭ.

В соответствии с документами, регламентирующими ЕГЭ по математике профильного уровня в 2023 году, каждый вариант содержит 18 заданий. Первая часть состоит из 11 заданий, вторая — из 7 заданий. Последние семь заданий подразумевают полное развёрнутое решение.

Семь вариантов даны с решениями, позволяющими проверить полноту и точность Ваших рассуждений. Ответы имеются ко всем заданиям.

В книге приведены типовые бланки ответов ЕГЭ, а также дана карта индивидуальных достижений обучающегося, которую можно использовать для отслеживания динамики результативности выполнения заданий типовых экзаменационных вариантов.

Если Вы собираетесь поступить в вуз на техническую или экономическую специальность и Вам нужен высокий балл на ЕГЭ по математике, эта книга для Вас.

Если Вы планируете продолжать своё математическое образование и претендуете на 90–100 баллов на ЕГЭ по математике, то Вам эта книга также будет полезна.

Как пользоваться сборником

Если Ваша цель — подтвердить свою школьную оценку и самооценку и получить хороший балл по математике для поступления в вуз, Ваш экзамен состоит из заданий 1–14. Все эти задания являются стандартными с точки зрения школьной программы. Помимо заданий практико-ориентированного блока, здесь предлагаются задачи на понимание основных фактов и идей школьного курса математики, а также задачи, где нужно решить уравнения, найти элементы пространственной фигуры, исследовать функцию и т. п. Вы достигнете своей цели тренировкой, тренировкой и тренировкой. Обратите также внимание на задания 15 и 16. Они, конечно, посложнее предыдущих. Здесь уже нужно подумать, пофантазировать.

Если Ваша цель — поступить на математическую специальность и Вам нужен очень высокий балл на ЕГЭ, тогда Вы должны уверенно решать задания 1–14 (как ни странно, наиболее подготовленные учащиеся часто ошибаются в простых заданиях по небрежности). Вам нужно уметь выполнять (может быть, с некоторыми недочётами) задания 15 и 16. Основной объект Вашего внимания — задание 17, требующее умения комбинировать геометрические и алгебраические идеи, видеть за уравнением фигуру, за рисунком — решение уравнений и их систем; умения вообразить взаимное расположение двигающихся по плоскости линий и фигур.

Задание 18 требует высокой математической культуры, но не очень много специальных знаний. Все необходимые сведения о целых числах и делимости изучаются в 5–7 классах. Вопрос не в знаниях, а в том, как их применить. Здесь важно сочетание опыта, фантазии и подготовки. Помощь окажут сборники олимпиадных заданий, популярные математические статьи и журналы. Небесполезным, надеемся, будет и наш сборник.

Как пользоваться готовыми решениями вариантов

Обратите внимание на то, что некоторые варианты похожи друг на друга. Будем говорить, что такие варианты собраны по одному плану. Если для какого-то варианта приведены решения задач, то варианты, собранные по тому же плану, имеют аналогичные решения. Можно предложить два способа использования готовых решений при подготовке.

Вы не можете решить задачу: в этом случае посмотрите решение и тщательно разберитесь в нём. Недостаточно просто прочесть решение и понять, что там написано. Решения не очень подробные. Нужно проделать самостоятельно пропущенные выкладки, не только понять ход решения, но и снять возникающие вопросы «почему так?». Когда Вы разберётесь в решении, попробуйте повторить его самостоятельно, осмысленно и осознанно воспроизводя все логические шаги и вычисления. Ваш вариант решения будет гораздо больше по объёму, поскольку он будет подробнее. Затем возьмите вариант того же плана, но без решения, и решите в этом варианте аналогичное задание, ещё раз воспроизводя все логические построения и вычисления. Наконец, попробуйте изменить решение, может быть, улучшить его. Попробуйте решить похожую задачу с изменённым условием.

Вы решили задание самостоятельно, и ответы совпали. Это не означает, что Ваше решение не содержит упущений или логических ошибок. Сравните своё решение с решением, предложенным авторами. Попробуйте определить, какое решение Вам нравится больше, разобраться, в чём решения различаются, а в чём схожи. Проверьте, рассмотрели ли Вы все нужные случаи, убедительно ли сумели объяснить все свои построения и преобразования.

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8 . -0 , 8 Бланк

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов № 1 и № 2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН - 2023

БЛАНК ОТВЕТОВ № 1

Код региона | Код предмета | Название предмета | Подпись участника ЕГЭ строго внутри окошка | Резерв - 4

Заполнять гелевой или капиллярной ручкой ЧЕРНЫМИ чернилами ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ и ЦИФРАМИ по следующим образцам:

А Б В Г Д Е Ё Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я
A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z , –
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 Ä Å À Ö Ö É Ë È Ê Ï Ì Ü Ù Û ß Ç

ВНИМАНИЕ! Все бланки и контрольные измерительные материалы рассматриваются в комплекте

Результаты выполнения заданий с КРАТКИМ ОТВЕТОМ

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40

Замена ошибочных ответов на задания с КРАТКИМ ОТВЕТОМ

\-
\-
\-
\-
\-
\-

ЗАПОЛНЯЕТСЯ ОТВЕТСТВЕННЫМ ОРГАНИЗАТОРОМ В АУДИТОРИИ:

Количество заполненных полей «Замена ошибочных ответов»

Подпись ответственного организатора строго внутри окошка

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН - 2023

БЛАНК ОТВЕТОВ № 2

лист 1

Код региона | Код предмета | Название предмета | Резерв - 5

Бланк ответов № 2 (лист 2) | Лист

Перепишите значения полей "Код региона", "Код предмета", "Название предмета" из БЛАНКА РЕГИСТРАЦИИ.
Отвечая на задания с РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы.
Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете, например, 31.
Условия задания переписывать не нужно.

ВНИМАНИЕ! Все бланки и контрольные измерительные материалы рассматриваются в комплекте

✓ - задачи, которые следует решать устно (в силу их легкости или используя лайфхаки)

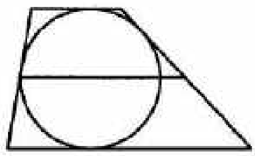
Оборотная сторона бланка НЕ ЗАПОЛНЯЕТСЯ. Используйте бланк ответов № 2 (лист 2).

ВАРИАНТ 1

Часть 1

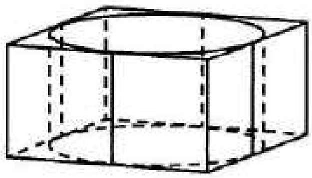
Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

✓ **1** Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 7 и 4. Найдите среднюю линию трапеции.



Ответ:____________________.

✓ **2** Цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед. Радиус основания и высота цилиндра равны 8. Найдите объём параллелепипеда.



Ответ:____________________.

✓ **3** Вероятность того, что на тестировании по физике учащийся К. верно решит больше 9 задач, равна 0,79. Вероятность того, что К. верно решит больше 8 задач, равна 0,85. Найдите вероятность того, что К. верно решит ровно 9 задач.

Ответ:____________________.

✓ **4** При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше, чем 810 г, равна 0,96. Вероятность того, что масса окажется больше, чем 790 г, равна 0,93. Найдите вероятность того, что масса буханки больше, чем 790 г, но меньше, чем 810 г.

Ответ:____________________.

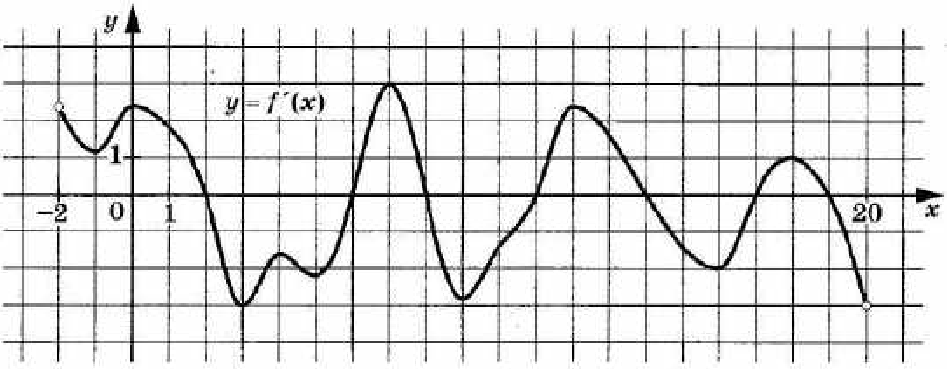
5 Найдите корень уравнения $\log_3(5-2x)=\log_3(1-4x)+1$.

Ответ:____________________.

6 Найдите значение выражения $\dfrac{\sin 126^\circ}{4\sin 63^\circ \cdot \sin 27^\circ}$.

Ответ:____________________.

7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2;\ 20)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[1;\ 15]$.



Ответ:____________________.

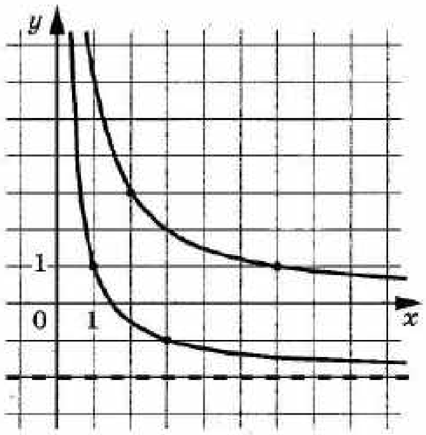
8 При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = 1{,}3122 \cdot 10^7$ Па $\cdot$ м^4, где p — давление в газе в паскалях, V — объём газа в кубических метрах, $k = \dfrac{4}{3}$. Найдите, какой объём V (в куб. м) будет занимать газ при давлении p, равном $1{,}25 \cdot 10^6$ Па.

Ответ:____________________.

9 Моторная лодка прошла против течения реки 96 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 часа меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 10 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:____________________.

10 На рисунке изображены части графиков функций $f(x)=\frac{k}{x}$ и $g(x)=\frac{c}{x}+d$. Найдите ординату точки пересечения графиков этих функций.



Ответ:___________________.

11 Найдите наименьшее значение функции $y=x\sqrt{x}-27x+6$ на отрезке [1; 422].

Ответ:___________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $2\sin^2 x-3\cos(-x)-3=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right]$.

13 В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с бо́льшим основанием AD. Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD соответственно. Плоскость α проходит через точки M и N параллельно прямой SO.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α является трапецией.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α, если $AD=9$, $BC=7$, $SO=6$, а прямая SO перпендикулярна прямой AD.

14 Решите неравенство $4^x+\dfrac{112}{4^x-32}\le 0$.

15 В июле 2027 года планируется взять кредит на три года в размере 1200 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг будет возрастать на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- платежи в 2028 и 2029 годах должны быть равными;
- к июлю 2030 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что платёж в 2030 году составит 673,2 тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж 2028 года?

16 В параллелограмме $ABCD$ угол BAC вдвое больше угла CAD. Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BC в точке L. На продолжении стороны CD за точку D выбрана такая точка E, что $AE=CE$.

а) Докажите, что $AL:AC=AB:BC$.

б) Найдите EL, если $AC=21$, $\operatorname{tg}\angle BCA=0{,}4$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(a-x)^2+4a+1=(2x+1)^2-8|x|$$

имеет четыре различных корня.

18 Есть три коробки: в первой коробке 112 камней, во второй — 99, а третья — пустая. За один ход берут по одному камню из любых двух коробок и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.

а) Могло ли в первой коробке оказаться 103 камня, во второй — 99, а в третьей — 9?

б) Могло ли в третьей коробке оказаться 211 камней?

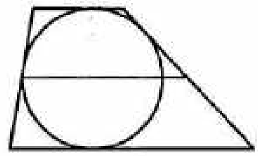
в) Во второй коробке оказалось 4 камня. Какое наибольшее число камней могло оказаться в третьей коробке?

ВАРИАНТ 2

Часть 1

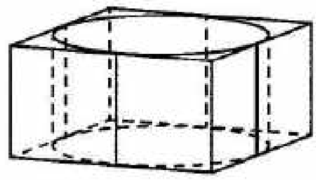
Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

✓ **1** Около окружности описана трапеция, периметр которой равен 30. Найдите длину её средней линии.



Ответ:____________________.

✓ **2** Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 18,5. Объём параллелепипеда равен 5476. Найдите высоту цилиндра.



Ответ:____________________.

✓ **3** Вероятность того, что на тестировании по химии учащийся П. верно решит больше 10 задач, равна 0,63. Вероятность того, что П. верно решит больше 9 задач, равна 0,75. Найдите вероятность того, что П. верно решит ровно 10 задач.

Ответ:____________________.

✓ **4** При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше, чем 810 г, равна 0,97. Вероятность того, что масса окажется больше, чем 790 г, равна 0,94. Найдите вероятность того, что масса буханки больше, чем 790 г, но меньше, чем 810 г.

Ответ:____________________.

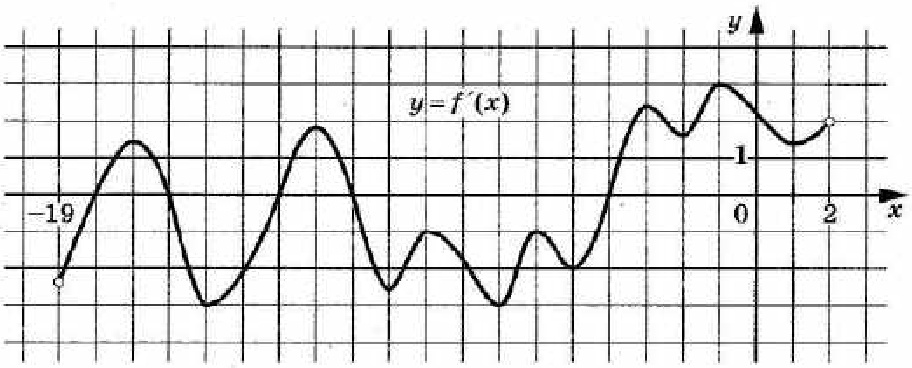
5 Найдите корень уравнения $\log_4(7+6x)=\log_4(1+x)+2$.

Ответ:____________________.

6 Найдите значение выражения $\dfrac{2\cos 20^\circ \cdot \cos 70^\circ}{5\sin 40^\circ}$.

Ответ:____________________.

7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-19;\ 2)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-14;\ 0]$.



Ответ:____________________.

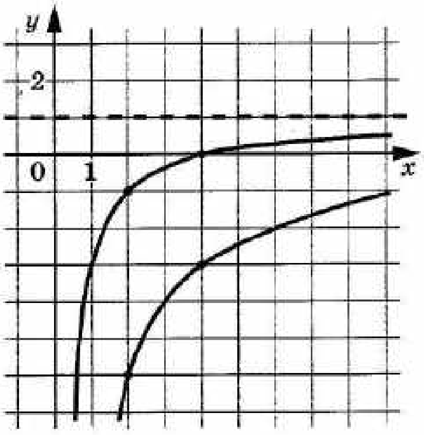
8 При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = 8{,}1 \cdot 10^4$ Па $\cdot$ м^4, где p — давление в газе в паскалях, V — объём газа в кубических метрах, $k = \dfrac{4}{3}$. Найдите, какой объём V (в куб. м) будет занимать газ при давлении p, равном $6{,}25 \cdot 10^5$ Па.

Ответ:____________________.

9 Моторная лодка прошла против течения реки 247 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:____________________.

10 На рисунке изображены части графиков функций $f(x)=\dfrac{k}{x}$ и $g(x)=\dfrac{c}{x}+d$. Найдите абсциссу точки пересечения графиков этих функций.



Ответ:___________________.

11 Найдите точку максимума функции $y=15+21x-4x\sqrt{x}$.

Ответ:___________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $\sin 2x-2\sin(-x)=1+\cos(-x)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$.

13 В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с бо́льшим основанием AD. Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD соответственно. Плоскость α проходит через точки M и N параллельно прямой SO.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α является трапецией.
б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α, если $AD=8{,}5$, $BC=7{,}5$, $SO=6{,}5$, а прямая SO перпендикулярна прямой AD.

14 Решите неравенство $5^x-10\geq\frac{225}{5^x-10}$.

15 В июле 2027 года планируется взять кредит на 3 года в размере 600 тыс. рублей. Условия возврата таковы:

– каждый январь действия кредита долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в 2028 и 2029 годах платежи по кредиту равные;
– в 2030 году выплачивается остаток по кредиту.

Найдите платёж 2029 года, если общие выплаты по кредиту составили 733,5 тыс. рублей.

16 В параллелограмме $ABCD$ угол BAC вдвое больше угла CAD. Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BC в точке L. На продолжении стороны CD за точку D выбрана такая точка E, что $AE=CE$.

а) Докажите, что $AB:AL=BC:AC$.
б) Найдите EL, если $AC=24$, $\operatorname{tg}\angle BCA=0{,}6$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$2a^2+3ax-2x^2-8a-6x+10|x|=0$$

имеет четыре различных корня.

18 Есть три коробки: в первой коробке 95 камней, во второй — 104, а третья — пустая. За один ход берут по одному камню из любых двух коробок и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.

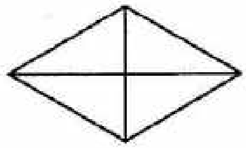
а) Могло ли в третьей коробке оказаться 199 камней?
б) Могло ли в первой коробке оказаться 100 камней, во второй — 50, а в третьей — 49?
в) В первой коробке оказалось 2 камня. Какое наибольшее число камней могло оказаться в третьей коробке?

ВАРИАНТ 3

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

✓ **1** Площадь ромба равна 10. Одна из его диагоналей равна 8. Найдите другую диагональ.



Ответ:____________________.

✓ **2** Длина окружности основания цилиндра равна 5, высота равна 6. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Ответ:____________________.

✓ **3** Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 21 пассажира, равна 0,83. Вероятность того, что окажется меньше 10 пассажиров, равна 0,46. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 10 до 20 включительно.

Ответ:____________________.

4 Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Биолог» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Биолог» выиграет жребий ровно два раза.

Ответ:____________________.

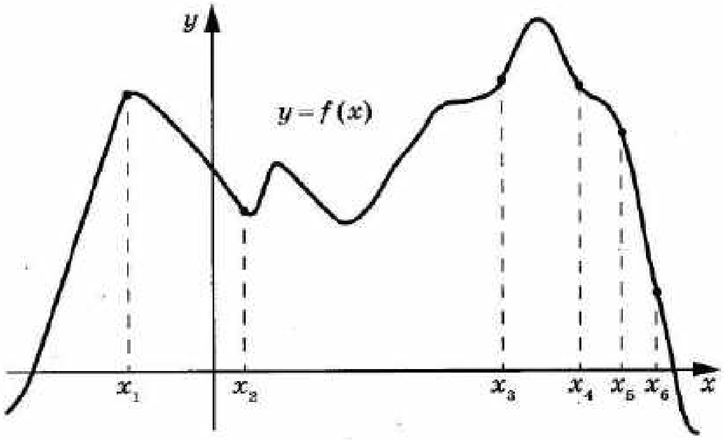
5 Решите уравнение $\cos\frac{\pi(2x-6)}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

Ответ:____________________.

6 Найдите значение выражения $\frac{4^{4,75}}{8^{2,5}}$.

Ответ: ________________.

✓ **7** На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечено шесть точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6. В ответе укажите количество точек (из отмеченных), в которых производная функции $f(x)$ положительна.



Ответ: ________________.

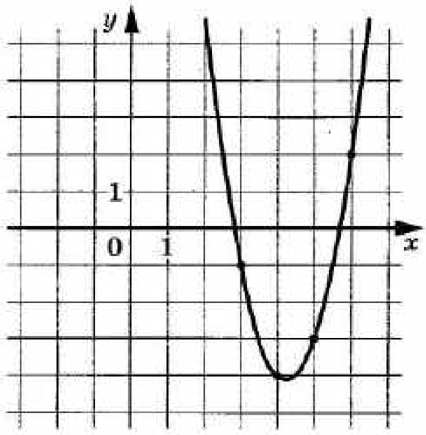
8 Наблюдатель находится на высоте h, выраженной в метрах. Расстояние от наблюдателя до наблюдаемой им линии горизонта, выраженное в километрах, вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. На какой высоте находится наблюдатель, если он видит линию горизонта на расстоянии 25,6 километра? Ответ дайте в метрах.

Ответ: ________________.

9 Заказ на изготовление 238 деталей первый рабочий выполняет на 3 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей за час изготавливает второй рабочий, если известно, что первый за час изготавливает на 3 детали больше?

Ответ: ________________.

10 На рисунке изображён график функции $f(x)=ax^2+bx+c$. Найдите c.



Ответ:____________________.

✓ **11** Найдите наибольшее значение функции $y=\ln(x+18)^{12}-12x$ на отрезке $[-17{,}5;\ 0]$.

Ответ:____________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $4^{x+\sqrt{x}-1{,}5}+3\cdot 4^{x-\sqrt{x}+1{,}5}-4^{x+1}=0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2;\ 6]$.

13 В прямой пятиугольной призме $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ высота AA_1 равна $3\sqrt{5}$, $BC=CD=6$, а четырёхугольник $ABDE$ — прямоугольник со сторонами $AB=5$ и $AE=4\sqrt{5}$.

а) Докажите, что плоскости CA_1E_1 и AED_1 перпендикулярны.

б) Найдите объём многогранника $CAED_1B_1$.

14 Решите неравенство $\log_{\operatorname{tg}3,2}\left(\log_3\left(9-x^2\right)\right)\geq 0$.

15 В июле Максим планирует взять кредит в банке на некоторую сумму. Банк предложил Максиму два варианта кредитования.

1-й вариант:

- кредит предоставляется на 3 года;
- в январе каждого года действия кредита долг увеличивается на 20 % от суммы долга на конец предыдущего года;
- в период с февраля по июнь каждого года действия кредита выплачиваются равные суммы, причём последний платёж должен погасить долг по кредиту полностью,

2-й вариант:

- кредит предоставляется на 2 года;
- в январе каждого года действия кредита долг увеличивается на 24 %;
- в период с февраля по июнь каждого года действия кредита выплачиваются равные суммы, причём последний платёж должен погасить долг по кредиту полностью.

Когда Максим подсчитал, то выяснил, что по 1-му варианту кредитования ему придётся выплачивать на 373 600 рублей больше, чем по 2-му варианту. Какую сумму Максим планирует взять в кредит?

16 Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $BC=7$ и $AB=CD=20$ вписан в окружность радиусом $R=16$.

а) Докажите, что прямые BC и AD параллельны.

б) Найдите AD.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{\log_{0,4}\left(6x^2-13x+5ax-6a^2-13a+6\right)}{\sqrt{2x-3a+4}}=0$$

имеет единственный корень.

18 Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 7 раз больше, либо в 7 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 9177.

а) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

б) Может ли последовательность состоять из пяти членов?

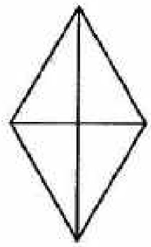
в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

ВАРИАНТ 4

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Площадь ромба равна 9. Одна из его диагоналей в 8 раз больше другой. Найдите меньшую диагональ.



Ответ:____________________.

2 Длина окружности основания конуса равна 6, образующая равна 4. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

Ответ:____________________.

3 Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 18 пассажиров, равна 0,9. Вероятность того, что окажется меньше 9 пассажиров, равна 0,66. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 9 до 17 включительно.

Ответ:____________________.

4 Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Стартер» по очереди играет с командами «Ротор», «Мотор» и «Монтёр». Найдите вероятность того, что «Стартер» будет начинать только вторую игру.

Ответ:____________________.

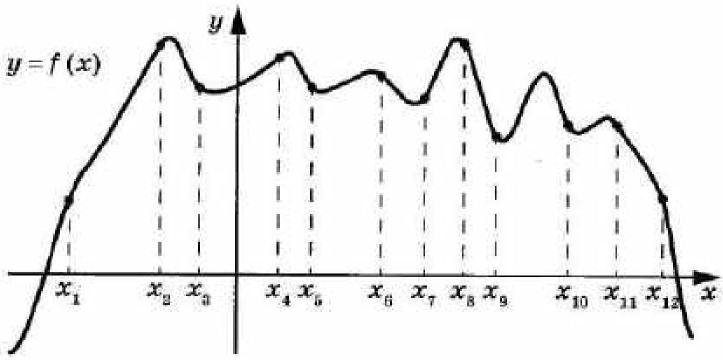
5 Решите уравнение $\cos\frac{\pi(8x+8)}{3}=\frac{1}{2}$. В ответе запишите наименьший положительный корень.

Ответ:____________________.

✓ **6** Найдите значение выражения $\frac{125^{3,2}}{25^{3,3}}$.

Ответ:____________________.

✓ **7** На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечено двенадцать точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}. В ответе укажите количество точек (из отмеченных), в которых производная функции $f(x)$ отрицательна.



Ответ:____________________.

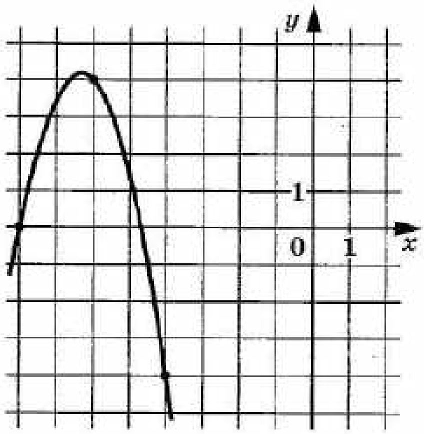
8 Наблюдатель находится на высоте h, выраженной в метрах. Расстояние от наблюдателя до наблюдаемой им линии горизонта, выраженное в километрах, вычисляется по формуле $l=\sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R=6400$ км — радиус Земли. На какой высоте находится наблюдатель, если он видит линию горизонта на расстоянии 60 километров? Ответ дайте в метрах.

Ответ:____________________.

9 Заказ на изготовление 216 деталей первый рабочий выполняет на 6 часов быстрее, чем второй. Сколько деталей за час изготавливает первый рабочий, если известно, что он за час изготавливает на 6 деталей больше второго?

Ответ:____________________.

10 На рисунке изображён график функции $f(x)=ax^2+bx+c$. Найдите ординату точки пересечения графика функции $y=f(x)$ с осью ординат.



Ответ:__________________.

11 Найдите точку минимума функции $y=10x-\ln(x+11)+3$.

Ответ:__________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $5^{x+\sqrt{x}-1}+6\cdot5^{x-\sqrt{x}+1}-5^{x+1}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [1; 2,56].

13 В прямой пятиугольной призме $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ высота равна $2\sqrt{3}$, треугольник BCD — правильный, со стороной 6, а четырёхугольник $ABDE$ — равнобедренная трапеция со сторонами $AB=DE=2$, $BD=6$ и $AE=4$.

а) Докажите, что плоскости CA_1E_1 и AED_1 перпендикулярны.

б) Найдите объём многогранника $CAED_1B_1$.

14 Решите неравенство $\log_{\operatorname{tg}0{,}9}\left(\log_{\frac{1}{4}}\left(x^2-2\right)\right)\leq 0$.

15 В июле Борис планирует взять кредит в банке на некоторую сумму. Банк предложил Борису два варианта кредитования.

1-й вариант:
- кредит предоставляется на 3 года;
- в январе каждого года действия кредита долг увеличивается на 10 % от суммы долга на конец предыдущего года;
- в период с февраля по июнь каждого года действия кредита выплачиваются равные суммы, причём последний платёж должен погасить долг по кредиту полностью.

2-й вариант:
- кредит предоставляется на 2 года;
- в январе каждого года действия кредита долг увеличивается на 16 % от суммы долга на конец предыдущего года;
- в период с февраля по июнь каждого года действия кредита выплачиваются равные суммы, причём последний платёж должен погасить долг по кредиту полностью.

Когда Борис подсчитал, то выяснил, что по 1-му варианту кредитования ему придётся выплачивать на 353 740 рублей меньше, чем по 2-му варианту. Какую сумму Борис планирует взять в кредит?

16 Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $BC=14$ и $AB=CD=40$ вписан в окружность радиусом $R=25$.

а) Докажите, что прямые BC и AD параллельны.

б) Найдите AD.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{\log_{0{,}2}\left(6x^2+16ax+7x+8a^2+2a-2\right)}{\sqrt{4-3a-2x}}=0$$

имеет единственный корень.

18 Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 8 раз больше, либо в 8 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 4040.

а) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

б) Может ли последовательность состоять из четырёх членов?

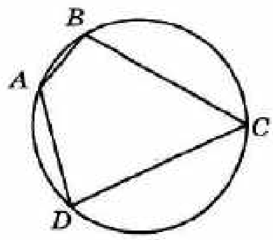
в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

ВАРИАНТ 5

Часть 1

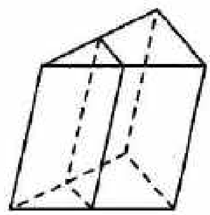
Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

✓ **1** Стороны AB, BC, CD и AD четырёхугольника $ABCD$ стягивают дуги описанной окружности, градусные величины которых равны соответственно 46°, 115°, 122°, 77°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.



Ответ:___________________.

✓ **2** Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 24. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.



Ответ:___________________.

✓ **3** Вероятность того, что новый принтер в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,097. В некотором городе из 1000 проданных принтеров в течение года в мастерские по гарантии поступила 101 штука. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

Ответ:___________________.

✓ **4** Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,03. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

Ответ:___________________.

✓ **5** Решите уравнение $\log_4 2^{8x+20} = 8$.

Ответ:___________________.

6 Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{9}}$.

Ответ:____________________.

7 Прямая $y=5x-8$ является касательной к графику функции $y=6x^2+bx+16$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

Ответ:____________________.

8 Двигаясь со скоростью $v=4$ м/с, трактор тащит сани с силой $F=90$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Мощность, развиваемая трактором, вычисляется по формуле $N=Fv\cos\alpha$. Найдите, при каком угле α (в градусах) эта мощность будет равна 180 кВт (кВт — это $\dfrac{\text{кН}\cdot\text{м}}{\text{с}}$).

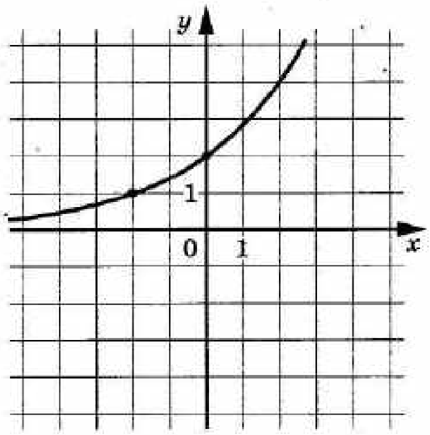
Ответ:____________________.

9 Расстояние между пристанями A и B равно 144 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через 1 час вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт B, тотчас повернула обратно и возвратилась в A. К этому времени плот проплыл 18 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 1 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:____________________.

10 На рисунке изображён график функции $f(x)=a^{x+2}$. Найдите $f(6)$.

Ответ:____________________.



11 Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 + 18x^2 + 81x + 56$ на отрезке $[-7;\ 0]$.

Ответ:__________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $2^{5\sin 5x} + 6^{1+\sin 5x} = 24^{\sin 5x} + 3 \cdot 8^{\frac{1}{3}+\sin 5x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ \frac{7\pi}{2}\right]$.

13 В правильную треугольную пирамиду с боковым ребром $\sqrt{13}$ и стороной основания 6 вписан шар. Плоскость α перпендикулярна высоте пирамиды и проходит через её середину.

а) Докажите, что плоскость α и шар пересекаются более чем в одной точке.
б) Найдите площадь сечения шара плоскостью α.

14 Решите неравенство $\dfrac{\log_3^2(x-1{,}5)-1}{2^x-3} \le 0$.

15 В июне 2025 года Вадим Олегович планирует взять кредит в банке на 4 года. Условия его возврата таковы:

– в январе каждого года действия кредита долг увеличивается на 10 % от суммы долга на конец предыдущего года;
– в период с февраля по июнь каждого из 2026, 2027 и 2028 годов необходимо выплатить часть долга, причём каждый из платежей 2027 и 2028 годов в 1,5 раза больше платежа предыдущего года;
– в период с февраля по июнь 2029 года выплачивается оставшаяся сумма по кредиту, равная 3 304 840 рублей.

Найдите сумму кредита, если общие выплаты по нему составили 10 904 840 рублей.

16 В трапеции $ABCD$ с меньшим основанием BC точки E и F — середины сторон BC и AD соответственно. В каждый из четырёхугольников $ABEF$ и $ECDF$ можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.
б) Найдите радиус окружности, описанной около трапеции $ABCD$, если $AB = 7$, а радиус окружности, вписанной в четырёхугольник $ABEF$, равен 2,5.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y^2 - x = 4 - 2a, \\ y^4 + x^2 = a^2 - 3a + 4 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

18 Из k кг материала фабрика изготавливает n одинаковых деталей массой m кг каждая, причём $k = nm + q$, где q кг — остатки материала, и $q < m$. После внедрения новых технологий на фабрике начали выпускать детали нового типа, каждая из которых стала на 0,2 кг легче детали старого типа, причём из 63 кг материала деталей нового типа стали делать на две больше, чем делали деталей старого типа из 64 кг материала.

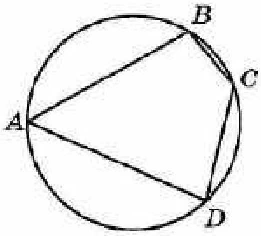
а) Может ли новая деталь весить столько, что на изготовление 15 новых деталей будет достаточно 63 кг материала, а на 16 — уже нет?
б) Может ли новая деталь весить столько, что на изготовление 40 новых деталей будет достаточно 63 кг материала, а на 41 — уже нет?
в) Найдите такое минимальное число n, что фабрика может выпускать n новых деталей из 80 кг материала, а $n - 1$ деталь не сможет, не нарушая условия $q < m$.

ВАРИАНТ 6

Часть 1

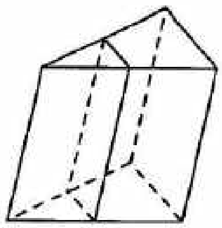
Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

✓ **1** Точки A, B, C, D, расположенные на окружности, делят эту окружность на четыре дуги AB, BC, CD и AD, градусные величины которых относятся соответственно как $12:4:7:13$. Найдите угол BAD. Ответ дайте в градусах.



Ответ:__________________.

✓ **2** Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Объём отсеченной треугольной призмы равен 4,5. Найдите объём исходной призмы.



Ответ:__________________.

✓ **3** Вероятность того, что новый блендер в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,06. В некотором городе из 1000 проданных блендеров в течение года в мастерские по гарантии поступило 54 штуки. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

Ответ:__________________.

✓ **4** Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,08. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

Ответ:__________________.

✓ **5** Решите уравнение $\log_{27} 3^{5-4x} = 9$.

Ответ:__________________.

6 Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[4]{18}\cdot\sqrt[4]{27}}{\sqrt[4]{6}}$.

Ответ:____________________.

7 Прямая $y=5x-9$ является касательной к графику функции $y=20x^2-15x+c$. Найдите c.

Ответ:____________________.

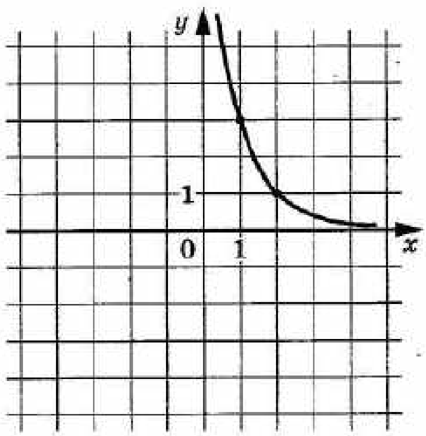
8 Мяч бросили под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}$. При каком значении угла α (в градусах) время полёта составит 3 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0=30$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

Ответ:____________________.

9 Расстояние между пристанями А и В равно 140 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через 1 час вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот проплыл 52 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:____________________.

10 На рисунке изображён график функции $f(x)=a^{x-2}$. Найдите значение x, при котором $f(x)=27$.



Ответ:____________________.

11 Найдите точку максимума функции $y=x^3+5,5x^2-42x+18$.

Ответ:___________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $750^{\cos 3x}+6\cdot 125^{\frac{1}{3}+\cos 3x}=5^{5\cos 3x}+30^{1+\cos 3x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{4};\ -\frac{3\pi}{4}\right]$.

13 В правильную треугольную пирамиду с боковым ребром 4 и стороной основания $2\sqrt{3}$ вписан шар. Плоскость α перпендикулярна высоте пирамиды и проходит через её середину.

а) Докажите, что плоскость α и шар не имеют общих точек.
б) Найдите расстояние от центра шара до плоскости α.

14 Решите неравенство $\dfrac{16-3^x}{\log_2^2(x+1,5)-4}\geq 0$.

15 В июне 2025 года Олег Вадимович планирует взять кредит в банке на 4 года. Условия его возврата таковы:
- в январе каждого года действия кредита долг увеличивается на 20 % от суммы долга на конец предыдущего года;
- в период с февраля по июнь каждого из 2026, 2027 и 2028 годов необходимо выплатить часть долга, причём каждый из платежей 2027 и 2028 годов в 1,6 раза больше платежа предыдущего года;
- в период с февраля по июнь 2029 года выплачивается оставшаяся сумма по кредиту, равная 1 770 240 рублей.

Найдите сумму кредита, если общие выплаты по нему составили 8 994 240 рублей.

16 В трапеции $ABCD$ с меньшим основанием BC точки E и F — середины сторон BC и AD соответственно. В каждый из четырёхугольников $ABEF$ и $ECDF$ можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.
б) Найдите радиус окружности, описанной около трапеции $ABCD$, если $BC = 16$, а радиус окружности, вписанной в четырёхугольник $ABEF$, равен 7.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y^2 - x = 2a + 8, \\ y^4 + x^2 = a^2 - 5a - 6 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

18 Из k кг материала фабрика изготавливает n одинаковых деталей массой m кг каждая, причём $k = nm + q$, где q кг — остатки материала, и $q < m$. После внедрения новых технологий на фабрике начали выпускать детали нового типа, каждая из которых стала на 0,1 кг легче детали старого типа, причём из 18 кг материала деталей нового типа стали делать на две больше, чем делали деталей старого типа из 21 кг материала.

а) Может ли новая деталь весить столько, что на изготовление 50 новых деталей будет достаточно 18 кг материала, а на 51 — уже нет?
б) Может ли новая деталь весить столько, что на изготовление 36 новых деталей будет достаточно 18 кг материала, а на 37 — уже нет?
в) Найдите все такие числа n, что фабрика может выпускать n новых деталей из 25 кг материала, не нарушая условия $q < m$.

ВАРИАНТ 7

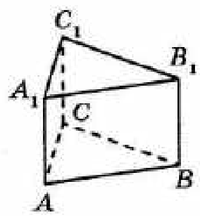
Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

✓ **1** В треугольнике ABC известно, что $AC = BC$, высота AH равна $6\sqrt{6}$, $BH = 3$. Найдите $\cos BAC$.

Ответ: ____________.

✓ **2** Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки B, C, A_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 5, а боковое ребро равно 6.



Ответ: ____________.

✓ **3** В группе туристов 25 человек. Их вертолётом доставляют в труднодоступный район, перевозя по 5 человек за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист Н. полетит вторым рейсом вертолёта.

Ответ: ____________.

4 Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 5. Какова вероятность того, что для этого потребовалось два броска? Ответ округлите до сотых.

Ответ: ____________.

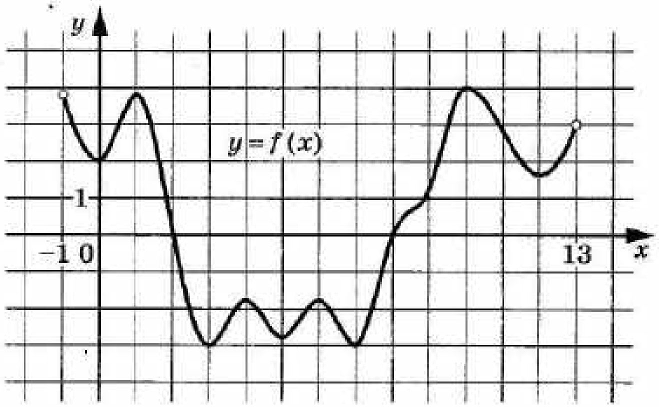
✓ **5** Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} = 256^x$.

Ответ: ____________.

6 Найдите значение выражения $\log_{2,5} 6 \cdot \log_6 0,4$.

Ответ: ____________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-1;\ 13)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -2$.



Ответ:____________________.

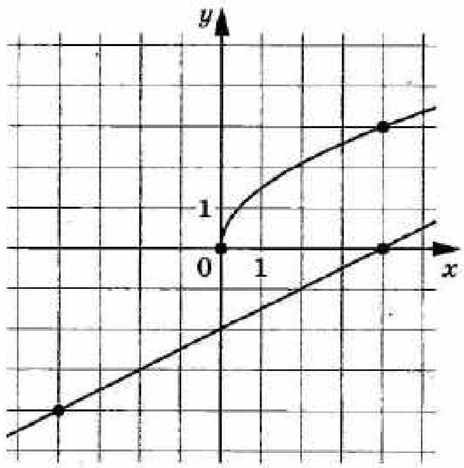
8 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1{,}4 + 11t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 7 метров?

Ответ:____________________.

9 Смешав 8-процентный и 26-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 16-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 20-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 8-процентного раствора использовали для получения смеси?

Ответ:____________________.

10 На рисунке изображены графики функций $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx + b$, которые пересекаются в точке $A(x_0;\ y_0)$. Найдите y_0.



Ответ:____________________.

✓ **11** Найдите точку максимума функции $y=(2x-1)\cos x-2\sin x+9$, принадлежащую промежутку $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ:____________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $\log_2^2\left(4x^2\right)+3\log_{0,5}(8x)=1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0{,}15;\ 1{,}5]$.

13 Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ относится к боковому ребру как $1:\sqrt{2}$. Через вершину D проведена плоскость α, перпендикулярная боковому ребру SB и пересекающая его в точке M.

а) Докажите, что M — середина SB.

б) Найдите расстояние между прямыми AC и DM, если высота пирамиды равна $6\sqrt{3}$.

14 Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x+4}\left(8-3^{2+x^2}\right)}{4^{x-1}-3}\le 0$.

15 15 июня 2025 года Сергей Данилович планирует взять кредит в банке на 4 года в размере целого числа миллионов рублей. Условия его возврата таковы:

– в январе каждого года действия кредита долг увеличивается на 15 % от суммы долга на конец предыдущего года;

– в период с февраля по июнь в каждый из 2026 и 2027 годов необходимо выплатить только начисленные в январе проценты по кредиту;

– в период с февраля по июнь в каждый из 2028 и 2029 годов выплачиваются равные суммы, причём последний платёж должен погасить долг по кредиту полностью.

Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат по кредиту превысит 12 млн рублей.

16 Окружность с центром в точке C касается гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC и пересекает его катеты AC и BC в точках E и F. Точка D — основание высоты, опущенной из вершины C. I и J — центры окружностей, вписанных в треугольники BCD и ACD.

а) Докажите, что I и J лежат на отрезке EF.
б) Найдите расстояние от точки C до прямой IJ, если $AC = 15$, $BC = 20$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых оба уравнения $a + \frac{x}{2} = |x|$ и $a\sqrt{2} + x = \sqrt{2a\sqrt{2}x - x^2 + 12}$ имеют ровно по 2 различных корня, и строго между корнями каждого из уравнений лежит корень другого уравнения.

18 Трёхзначное число, меньшее 910, поделили на сумму его цифр и получили натуральное число n.

а) Может ли n равняться 68?
б) Может ли n равняться 86?
в) Какое наибольшее значение может принимать n, если все цифры ненулевые?

ВАРИАНТ 8

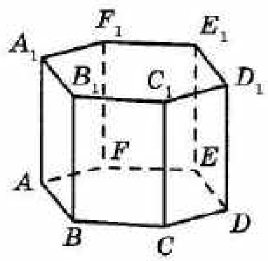
Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В треугольнике ABC известно, что $AC = BC$, высота AH равна 8, $BH = 20$. Найдите $\operatorname{tg} BAC$.

Ответ: ____________________.

✓ **2** Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A_1, B_1, F_1, E правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 10, а боковое ребро равно 9.



Ответ: ____________________.

✓ **3** В группе туристов 32 человека. Их вертолётом доставляют в труднодоступный район, перевозя по 4 человека за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист Г. полетит четвёртым рейсом вертолёта.

Ответ: ____________________.

4 Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 9. Какова вероятность того, что для этого потребовалось три броска? Ответ округлите до сотых.

Ответ: ____________________.

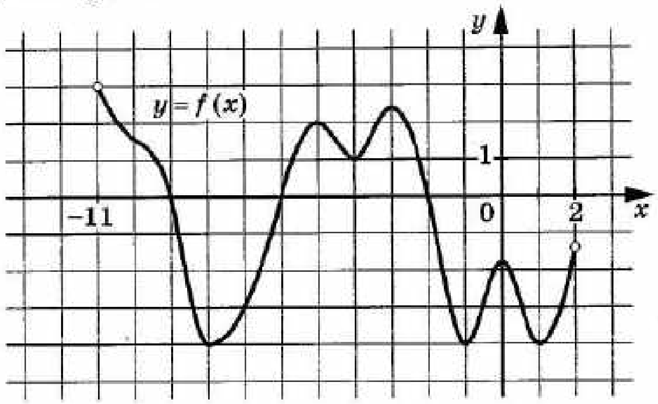
✓ **5** Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+4} = 729$.

Ответ: ____________________.

6 Найдите значение выражения $\log_6 1{,}25 \cdot \log_{0,8} 6$.

Ответ: ________________.

✓ **7** На рисунке изображён график фукции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-11;\ 2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y=f(x)$ параллельна прямой $y=-4$.



Ответ: ________________.

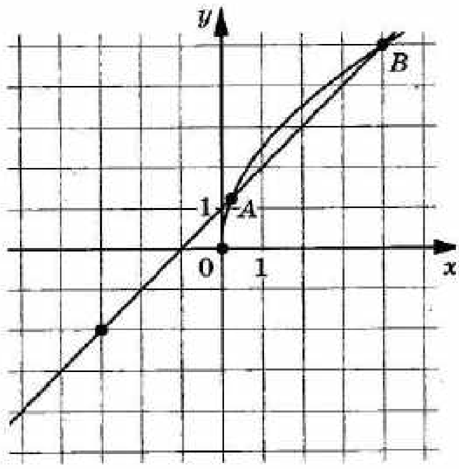
8 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t)=1+11t-5t^2$ где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 3 метров?

Ответ: ________________.

9 Имеется два сосуда. Первый содержит 25 кг, а второй — 20 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 52 % кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 53 % кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

Ответ: ________________.

10 На рисунке изображены графики функций $f(x)=a\sqrt{x}$ и $g(x)=kx+b$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки A.



Ответ: ________________.

✓ **11** Найдите наименьшее значение функции $y=6x-6\sin x+17$ на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ:____________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $\log_2^2(8x^2)-\log_4(2x)-1=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0{,}4;\ 0{,}8]$.

13 Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ относится к боковому ребру как $1:\sqrt{2}$. Через вершину D проведена плоскость α, перпендикулярная боковому ребру SB и пересекающая его в точке M.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α — это четырёхугольник, диагонали которого перпендикулярны.

б) Найдите площадь этого сечения, если боковое ребро пирамиды равно 6.

14 Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x-2}\left(4-3^{x-1}\right)}{2^{1-x^2}-3}\ge 0$.

15 15 июня 2025 года Данила Сергеевич планирует взять кредит в банке на 4 года в размере целого числа миллионов рублей. Условия его возврата таковы:

– в январе каждого года действия кредита долг увеличивается на 15 % от суммы долга на конец предыдущего года;

– в период с февраля по июнь в каждый из 2026 и 2027 годов необходимо выплатить только начисленные в январе проценты по кредиту;

– в период с февраля по июнь в каждый из 2028 и 2029 годов выплачиваются равные суммы, причём последний платёж должен погасить долг по кредиту полностью.

Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат по кредиту не превысит 20 млн рублей.

16 Окружность с центром в точке C касается гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC и пересекает его катеты AC и BC в точках E и F. Точка D — основание высоты, опущенной на AB. I и J — центры окружностей, вписанных в треугольники BCD и ACD.

а) Докажите, что точки E и F лежат на прямой IJ.
б) Найдите расстояние от точки C до прямой IJ, если $AC=2\sqrt{3}$, $BC=2$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых оба уравнения $a+\frac{x}{3}=|x|$ и $2a+x=\sqrt{2a^2+4ax-x^2+12}$ имеют ровно по 2 различных корня, и строго между корнями каждого из уравнений лежит корень другого уравнения.

18 Трёхзначное число, меньшее 700, поделили на сумму его цифр и получили натуральное число n.

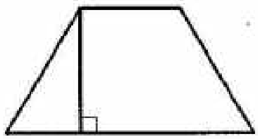
а) Может ли n равняться 64?
б) Может ли n равняться 78?
в) Какое наибольшее значение может принимать n, если все цифры ненулевые?

ВАРИАНТ 9

Часть 1

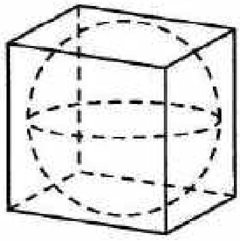
Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Основания равнобедренной трапеции равны 45 и 24. Тангенс острого угла равен $\frac{2}{7}$. Найдите высоту трапеции.



Ответ:____________________.

2 Куб описан около сферы радиуса 12,5. Найдите объём куба.



Ответ:____________________.

3 Какова вероятность того, что последние три цифры номера случайно выбранного паспорта одинаковы?

Ответ:____________________.

4 Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 9 очков в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 7 очков, в случае ничьей — 2 очка, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,2.

Ответ:____________________.

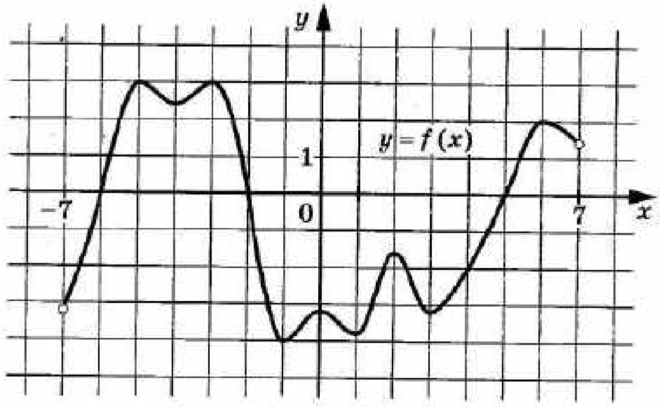
5 Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{160}{6-7x}}=1\frac{1}{3}$.

Ответ:____________________.

6 Найдите значение выражения $2^{4\log_4 12}$.

Ответ:____________________.

✓ **7** На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7;\ 7)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



Ответ:____________________.

8 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 744 МГц. Скорость погружения батискафа v вычисляется по формуле $v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов, f — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите частоту отражённого сигнала в МГц, если скорость погружения батискафа равна 12 м/с.

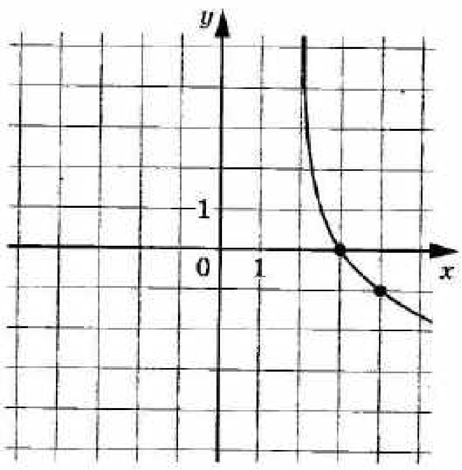
Ответ:____________________.

9 Первый насос наполняет бак за 35 минут, второй — за 1 час 24 минуты, а третий — за 1 час 45 минут. За сколько минут наполнят бак три насоса, работая одновременно?

Ответ:____________________.

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = \log_a(x-2)$. Найдите $f(10)$.

Ответ:____________________.



11 Найдите точку максимума функции $y=\left(4x^2-36x+36\right)e^{33-x}$.

Ответ:____________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $2\cos x\cdot\sin 2x=2\sin x+\cos 2x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\ \frac{9\pi}{2}\right]$.

13 Грань $ABCD$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является вписанной в основание конуса, а сечением конуса плоскостью $A_1B_1C_1$ является круг, вписанный в четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$.

а) Высота конуса равна h, ребро куба равно a. Докажите, что $3a<h<3{,}5a$.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и SA_1D, где S — вершина конуса.

14 Решите неравенство $4\log_{0,25}(1-4x)-\log_{\sqrt{2}}(-1-x)+4\log_4\left(x^2-1\right)\le\log_2 x^2$.

15 В июле Егор планирует взять кредит на 3 года на целое число миллионов рублей. Два банка предложили Егору оформить кредит на следующих условиях:

– в январе каждого года действия кредита долг увеличивается на некоторое число процентов (ставка плавающая — может быть разным для разных годов);

– в период с февраля по июнь каждого года действия кредита выплачиваются равные суммы, причём последний платёж должен погасить долг по кредиту полностью.

В первом банке процентная ставка по годам составляет 15, 20 и 10 процентов соответственно, а во втором — 20, 10 и 15 процентов. Егор выбрал наиболее выгодное предложение. Найдите сумму кредита, если эта выгода по общим выплатам по кредиту составила от 13 до 14 тысяч рублей.

16 На сторонах AB и CD четырёхугольника $ABCD$, около которого можно описать окружность, отмечены точки K и N соответственно. Около четырёхугольников $AKND$ и $BCNK$ также можно описать окружность. Косинус одного из углов четырёхугольника $ABCD$ равен 0,25.

а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ является равнобедренной трапецией.
б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $AKND$, если радиус окружности, описанной около четырёхугольника $ABCD$, равен 8, $AK : KB = 2 : 5$, а $BC < AD$ и $BC = 4$.

17 Найдите все такие значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{10x^2 + x - 24} \cdot \log_2((x-3)\cdot(a+5)+14) = 0$$

имеет ровно два различных корня.

18 Есть три коробки: в первой — 97 камней; во второй — 80, а в третьей коробке камней нет. Берут по одному камню из двух коробок и кладут их в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.

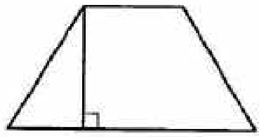
а) Могло ли в первой коробке оказаться 58 камней, во второй — 59, а в третьей — 60?
б) Может ли в первой и второй коробках камней оказаться поровну?
в) Какое наибольшее количество камней может оказаться во второй коробке?

ВАРИАНТ 10

Часть 1

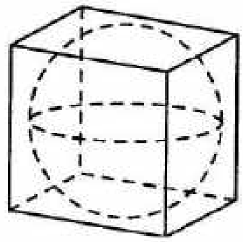
Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Основания равнобедренной трапеции равны 45 и 14. Высота трапеции равна 9,3. Найдите тангенс острого угла.



Ответ: __________________.

✓ **2** Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 2,5. Найдите площадь его поверхности.



Ответ: __________________.

3 Рассмотрим случайный телефонный номер. Какова вероятность того, что среди трёх последних цифр этого номера хотя бы две цифры одинаковы?

Ответ: __________________.

✓ **4** Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,5. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,34. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Ответ: __________________.

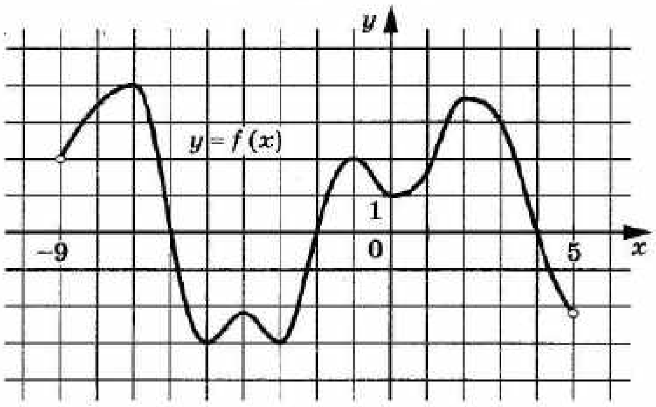
5 Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{50}{5x+45}}=1\frac{1}{4}$.

Ответ: __________________.

✓ **6** Найдите значение выражения $2^{12\log_8 5}$.

Ответ: __________________.

✓ **7** На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 5)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



Ответ:____________________.

8 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 217 МГц. Скорость погружения батискафа v вычисляется по формуле $v = c\cdot\dfrac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов, f — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите частоту отражённого сигнала в МГц, если скорость погружения батискафа равна 12 м/с.

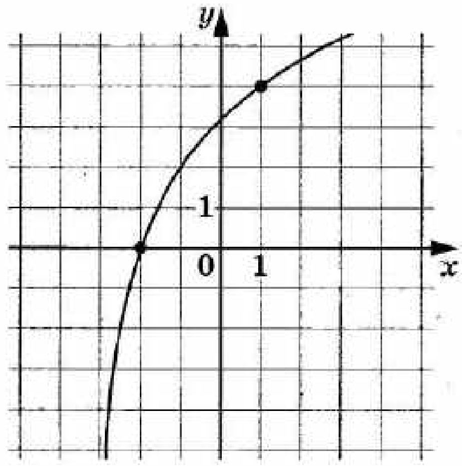
Ответ:____________________.

9 Боря и Ваня могут покрасить забор за 10 часов. Ваня и Гриша могут покрасить этот же забор за 15 часов, а Гриша и Боря — за 18 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроём?

Ответ:____________________.

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = \log_a(x+3)$. Найдите значение x, при котором $f(x) = 16$.

Ответ:____________________.



11 Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 9e^{x} - 3$ на отрезке [0; 3].

Ответ:____________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $2\sin x \cdot \sin 2x = 2\cos x + \cos 2x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

13 Грань $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является вписанной в основание конуса, а сечением конуса плоскостью $A_1B_1C_1$ является круг, вписанный в четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$; $AB = a$, $AA_1 = \sqrt{2}a$.

а) Высота конуса равна h. Докажите, что $4{,}5a < h < 5a$.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и SD_1C, где S — вершина конуса.

14 Решите неравенство $\log_5 x^2 + 4\log_{25}(6-2x) \geq \log_{\sqrt{5}}(x^2-4) + 2\log_{0,2}(2-x)$.

15 В июле Анна планирует взять кредит на 3 года на целое число миллионов рублей. Два банка предложили Анне оформить кредит на следующих условиях:

- в январе каждого года действия кредита долг увеличивается на некоторое число процентов (ставка плавающая — может быть разным для разных годов);
- в период с февраля по июнь каждого года действия кредита выплачиваются равные суммы, причём последний платёж должен погасить долг по кредиту полностью.

В первом банке процентная ставка по годам составляет 10, 20 и 15 процентов соответственно, а во втором — 15, 10 и 20 процентов. Анна выбрала наиболее выгодное предложение. Найдите сумму кредита, если эта выгода по общим выплатам по кредиту составила от 14 до 15 тысяч рублей.

16 На сторонах AB и CD четырёхугольника $ABCD$, около которого можно описать окружность, отмечены точки K и N соответственно. Около четырёхугольников $AKND$ и $BCNK$ также можно описать окружность. Косинус одного из углов четырёхугольника $ABCD$ равен 0,2.

а) Докажите, что прямые KN и AD параллельны.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $BCNK$, если радиус окружности, описанной около четырёхугольника $ABCD$, равен 7, $AK : KB = 9 : 10$, а $BC < AD$ и $BC = 10$.

17 Найдите все такие значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{10x^2-19x-15}\cdot\log_3(7-(a-4)\cdot(x+2))=0$$

имеет ровно два различных корня.

18 Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 7 раз больше, либо в 7 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 7735.

а) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

б) Может ли последовательность состоять из шести членов?

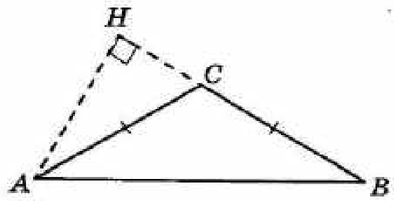
в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

ВАРИАНТ 11

Часть 1

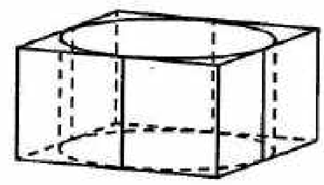
Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В тупоугольном треугольнике ABC известно, что $AC = BC = 10$, высота AH равна $\sqrt{51}$. Найдите косинус угла ACB.



Ответ:__________________.

✓ **2** Цилиндр вписан в правильную четырёхугольную призму. Радиус основания и высота цилиндра равны 3. Найдите площадь боковой поверхности призмы.



Ответ:__________________.

✓ **3** На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Тригонометрия», равна 0,1. Вероятность того, что это вопрос по теме «Внешние углы», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Ответ:__________________.

✓ **4** Две фабрики выпускают одинаковые стёкла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 30 % этих стёкол, вторая — 70 %, причём брак стёкол, изготовленных фабриками, составляет на первой фабрике 5 %, на второй — 4 %. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Ответ:__________________.

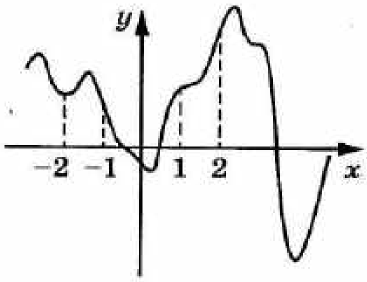
✓ **5** Найдите корень уравнения $4^{5x+2} = 0{,}8 \cdot 5^{5x+2}$.

Ответ:__________________.

6 Найдите значение выражения $\dfrac{5\sin 61^\circ}{\sin 299^\circ}$.

Ответ:____________________.

7 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки -2, -1, 1, 2. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



Ответ:____________________.

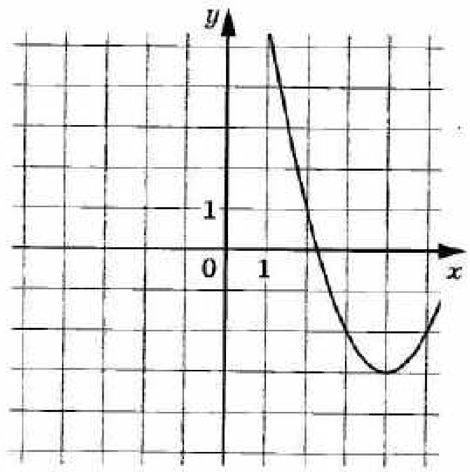
8 При температуре 0 °C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5} (^\circ C)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 6 мм? Ответ дайте в градусах Цельсия.

Ответ:____________________.

9 Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 105 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 7 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 4 часа. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из В в А. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:____________________.

10 На рисунке изображён график функции $f(x)=ax^2+bx+c$, где числа a, b и c — целые. Найдите $f(-5)$.



Ответ:____________________.

11 Найдите наименьшее значение функции $y=\frac{4}{3}x\sqrt{x}-3x+9$ на отрезке $[0{,}25;\ 30]$.

Ответ:____________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $2\sin^3(\pi+x)=\frac{1}{2}\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-\frac{5\pi}{2}\right]$.

13 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 16, высота SH равна 10. Точка K — середина бокового ребра SA. Плоскость, параллельная плоскости ABC, проходит через точку K и пересекает рёбра SB и SC в точках Q и P соответственно.

а) Докажите, что площадь четырёхугольника $BCPQ$ составляет $\frac{3}{4}$ площади треугольника SBC.

б) Найдите объём пирамиды $KBCPQ$.

14 Решите неравенство $\left(4^x-5\cdot 2^x\right)^2-20\left(4^x-5\cdot 2^x\right)\le 96$.

15 В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на 8 лет. Условия его возврата таковы:

– в январе 2026, 2027, 2028 и 2029 годов долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
– в январе 2030, 2031, 2032 и 2033 годов долг возрастает на 18 % по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– к июлю 2033 года кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1125 тысяч рублей?

16 Точки A, B, C, D и E лежат на окружности в указанном порядке, причём $AE=ED=CD$, а прямые AC и BE перпендикулярны. Отрезки AC и BD пересекаются в точке T.

а) Докажите, что прямая EC пересекает отрезок TD в его середине.

б) Найдите площадь треугольника ABT, если $BD=6$, $AE=\sqrt{6}$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2-a^2\right|=|x+a|\cdot\sqrt{x^2-4ax+5a}$$

имеет ровно один корень.

18 На доске написаны три различных натуральных числа. Второе число равно сумме цифр первого, а третье равно сумме цифр второго.

а) Может ли сумма этих чисел быть равна 2022?

б) Может ли сумма этих чисел быть равна 2021?

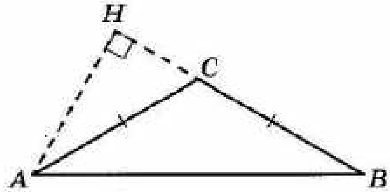
в) В тройке чисел первое число трёхзначное, а третье равно 2. Сколько существует таких троек?

ВАРИАНТ 12

Часть 1

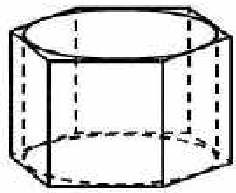
Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В тупоугольном треугольнике ABC известно, что $AC = BC$, высота AH равна 3, $CH = \sqrt{7}$. Найдите синус угла ACB.



Ответ:__________________.

2 Цилиндр вписан в правильную шестиугольную призму. Радиус основания цилиндра равен $\sqrt{3}$, а высота равна 2. Найдите площадь боковой поверхности призмы.



Ответ:__________________.

✓ **3** На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Вписанная окружность», равна 0,25. Вероятность того, что это вопрос по теме «Площадь», равна 0,3. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Ответ:__________________.

✓ **4** Две фабрики выпускают одинаковые стёкла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 25 % этих стёкол, вторая — 75 %, причём брак стёкол, изготовленных фабриками, составляет на первой фабрике 5 %, на второй — 1 %. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Ответ:__________________.

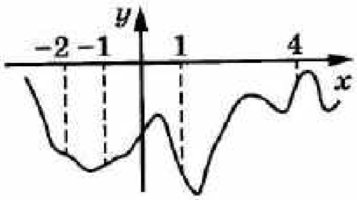
5 Найдите корень уравнения $9^{2x+5} = 3{,}24 \cdot 5^{2x+5}$.

Ответ:__________________.

✓ **6** Найдите значение выражения $\dfrac{4\cos 121^\circ}{\cos 59^\circ}$.

Ответ: ____________________.

✓ **7** На рисунке изображён график функции $y=f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки -2, -1, 1, 4. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



Ответ: ____________________.

✓ **8** При температуре 0 °С рельс имеет длину $l_0 = 15$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ)=l_0(1+\alpha\cdot t^\circ)$, где $\alpha=1{,}2\cdot10^{-5}(^\circ\mathrm{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 7,2 мм? Ответ дайте в градусах Цельсия.

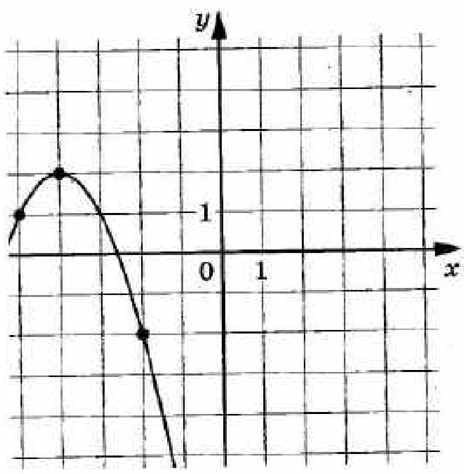
Ответ: ____________________.

9 Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 135 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 9 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 4 часа. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ____________________.

10 На рисунке изображён график функции $f(x)=ax^2+bx+c$. Найдите $f(-9)$.

Ответ: ____________________.



11 Найдите точку минимума функции $y=\frac{4}{3}x\sqrt{x}-5x+4$.

Ответ:__________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $2\cos^3(x-\pi)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2};\frac{11\pi}{2}\right]$.

13 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AD равна 10, высота SH равна 12. Точка K — середина бокового ребра SD. Плоскость AKB пересекает боковое ребро SC в точке P.

а) Докажите, что площадь четырёхугольника $CDKP$ составляет $\frac{3}{4}$ площади треугольника SCD.

б) Найдите объём пирамиды $ACDKP$.

14 Решите неравенство $\left(25^x-4\cdot5^x\right)^2+8\cdot5^x<2\cdot25^x+15$.

15 В июле 2023 года планируется взять кредит на 10 лет на некоторую сумму. Условия возврата таковы:

– каждый январь с 2024 по 2028 год долг возрастает на 18 % по сравнению с концом предыдущего года;
– каждый январь с 2029 по 2033 год долг возрастает на 16 % по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;
– к июлю 2033 года кредит должен быть полностью погашен.

Найдите сумму, которую планируется взять в кредит, если общая сумма выплат по кредиту должна составить 1470 тыс. рублей.

16 Точки A, B, C, D и E лежат на окружности в указанном порядке, причём $BC = CD = DE$, а $AC \perp BE$. Точка K — пересечение прямых BE и AD.

а) Докажите, что прямая CE делит отрезок KD пополам.

б) Найдите площадь треугольника ABK, если $AD = 4$, $DC = \sqrt{3}$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2 - a^2\right| = |x + a| \cdot \sqrt{x^2 - 5ax + 4a}$$

имеет ровно два различных корня.

18 На доске написаны три различных натуральных числа. Второе число равно сумме цифр первого, а третье равно сумме цифр второго.

а) Может ли сумма этих чисел быть равна 3456?

б) Может ли сумма этих чисел быть равна 2345?

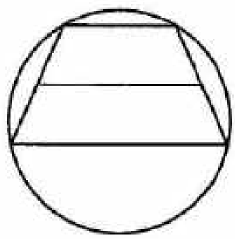
в) В тройке чисел первое число трёхзначное, а третье равно 5. Сколько существует таких троек?

ВАРИАНТ 13

Часть 1

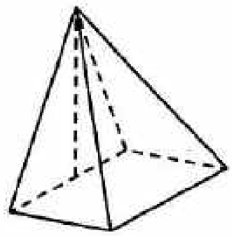
Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 38, средняя линия равна 11. Найдите боковую сторону трапеции.



Ответ:____________________.

2 Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Высота пирамиды равна 6. Найдите объём пирамиды.



Ответ:____________________.

✓ **3** На клавиатуре телефона 10 цифр, от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет чётной и меньше 7?

Ответ:____________________.

4 В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,25. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,1. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Ответ:____________________.

5 Решите уравнение $x = \frac{8x+36}{x+13}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Ответ:____________________.

6 Найдите значение выражения $2^{4\sqrt{10}-3} \cdot 2^{1-3\sqrt{10}} : 2^{\sqrt{10}-1}$.

Ответ:____________________.

7 Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 - 3t + 15,$$

где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, прошедшее с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 7$ с.

Ответ:____________________.

8 Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_п = 20$ °C, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0{,}5$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x, вода охлаждается от начальной температуры $T_в = 72$ °C до температуры T, причём $x = \alpha\frac{cm}{\gamma}\log_2\frac{T_в - T_п}{T - T_п}$, где $c = 4200\,\frac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 63\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot{}^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1{,}5$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 100 м.

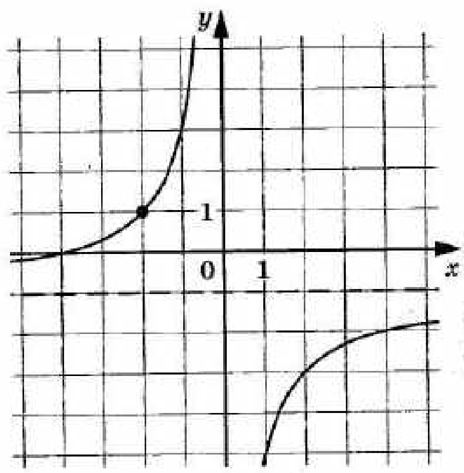
Ответ:____________________.

9 Имеется два сплава. Первый сплав содержит 5 % меди, второй — 14 % меди. Масса второго сплава больше массы первого на 5 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 12 % меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ:____________________.

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите $f(-8)$.

Ответ:____________________.



11 Найдите наименьшее значение функции $y = 42\cos x - 45x + 35$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ:___________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $3\cdot 9^{x+1} - 5\cdot 6^{x+1} + 4^{x+1,5} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

13 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ на рёбрах AC и BC отмечены соответственно точки M и N так, что $AM : MC = CN : BN = 2 : 1$.

а) Докажите, что плоскость MNB_1 проходит через середину ребра A_1C_1.

б) Найдите площадь сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью MNB_1, если $AB = 6$, $AA_1 = \sqrt{3}$.

14 Решите неравенство $27^{\lg(x-1)} \le \left(x^2 - 1\right)^{\lg 3}$.

15 По вкладу «А» банк в конце каждого года увеличивает на 20 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивает эту сумму на 12 % в течение каждого из первых двух лет. Найдите наибольшее натуральное число процентов, начисленное за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад будет менее выгоден, чем вклад «А».

16 В параллелограмме $ABCD$ угол A острый. На продолжениях сторон AD и CD за точку D выбраны точки M и N соответственно, причём $AN = AD$ и $CM = CD$.

а) Докажите, что $BN = BM$.

б) Найдите MN, если $AC = 5$, $\sin\angle BAD = \frac{5}{13}$.

17 Найдите все положительные значения a, при каждом из которых корни уравнения $3a^{2x} - 16^x + 2\cdot(4a)^x = 0$ принадлежат отрезку $[-2; -1]$.

18 Известно, что a, b, c, d, e и f — это различные, расставленные в некотором, возможно ином, порядке числа 2, 3, 4, 5, 6 и 16.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=6$?

б) Может ли выполняться равенство $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{961}{240}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$?

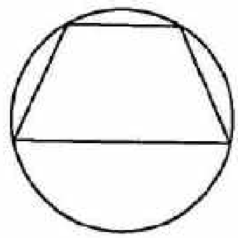
! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 14

Часть 1

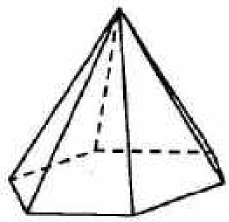
Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Боковая сторона равнобедренной трапеции равна её меньшему основанию, угол при основании равен $60°$, большее основание равно 28. Найдите радиус описанной окружности этой трапеции.



Ответ:_________________.

2 Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 3, боковое ребро равно 6. Найдите объём пирамиды.



Ответ:_________________.

✓ **3** Из множества натуральных чисел от 56 до 80 (включительно) наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 4?

Ответ:_________________.

4 В торговом центре два одинаковых автомата продают чай. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится чай, равна 0,2. Вероятность того, что чай закончится в обоих автоматах, равна 0,18. Найдите вероятность того, что к концу дня чай останется в обоих автоматах.

Ответ:_________________.

5 Решите уравнение $\frac{7x}{3x^2-26}=1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Ответ:_________________.

6 Найдите значение выражения $5^{\sqrt{3}-4}\cdot 5^{1+3\sqrt{3}}:5^{4\sqrt{3}-1}$.

Ответ:____________________.

7 Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t)=-\frac{1}{2}t^4+4t^3-t^2-t+14,$$

где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, прошедшее с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t=5$ с.

Ответ:____________________.

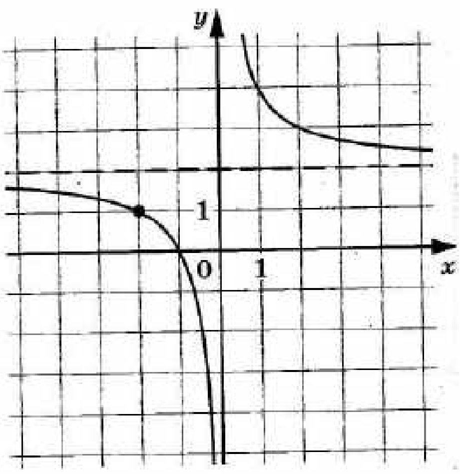
8 Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_п=15$ °C, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m=0{,}5$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x, вода охлаждается от начальной температуры $T_в=79$ °C до температуры T, причём $x=\alpha\frac{cm}{\gamma}\log_2\frac{T_в-T_п}{T-T_п}$, где $c=4200\ \frac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma=63\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot{}^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha=1{,}3$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 130 м.

Ответ:____________________.

9 Имеется два сплава. Первый сплав содержит 5 % никеля, второй — 14 % никеля. Масса второго сплава больше массы первого на 8 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 11 % никеля. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ:____________________.

10 На рисунке изображён график функции $f(x)=\frac{k}{x}+a$. Найдите, при каком значении x значение функции равно 7.



Ответ:____________________.

✓ **11** Найдите наибольшее значение функции $y=49x-46\sin x+37$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$.

Ответ:__________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $25^{x-0,5}-13\cdot 10^{x-1}+4^{x+0,5}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

13 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ на рёбрах AC и BC отмечены соответственно точки M и N так, что $AM : MC = CN : BN = 2 : 1$, точка K — середина ребра A_1C_1.

а) Докажите, что плоскость MNK проходит через вершину B_1.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости KMN, если $AB=6$, $AA_1=2{,}4$.

14 Решите неравенство $8^{\lg(-1-x)}\le\left(x^2-1\right)^{\lg 2}$.

15 По вкладу «А» банк в конце каждого года увеличивает на 10 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивает эту сумму на 14 % в течение каждого из первых двух лет. Найдите наименьшее натуральное число процентов, начисленное за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад будет более выгоден, чем вклад «А».

16 В параллелограмме $ABCD$ тангенс угла A равен 1,5. На продолжениях сторон AB и BC параллелограмма за точку B выбраны точки N и M соответственно, причём $BC = CN$ и $AB = AM$.

а) Докажите, что $DN = DM$.

б) Найдите MN, если $AC = \sqrt{13}$.

17 Найдите все положительные значения a, при каждом из которых корни уравнения $5a^{2x} - 2\cdot 4^x + 9\cdot(2a)^x = 0$ принадлежат отрезку $[-3;\ 1]$.

18 Известно, что a, b, c, d, e и f — это различные, расставленные в некотором, возможно ином, порядке числа 2, 3, 4, 6, 7 и 16.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=11$?

б) Может ли выполняться равенство $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{1345}{336}$?

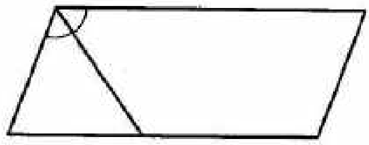
в) Какое наибольшее значение может принимать сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$?

ВАРИАНТ 15

Часть 1

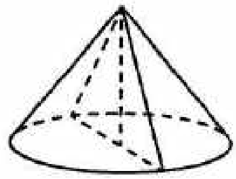
Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении $3:4$, считая от вершины острого угла. Найдите бо́льшую сторону параллелограмма, если его периметр равен 33.



Ответ: ________________.

✓ **2** Высота конуса равна 18, а длина образующей равна 30. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.



Ответ: ________________.

✓ **3** При изготовлении подшипников диаметром 62 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше, чем на 0,01 мм, равна 0,986. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше, чем 61,99 мм, или больше, чем 62,01 мм.

Ответ: ________________.

✓ **4** Биатлонист 4 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 2 раза попал в мишени, а последние 2 раза промахнулся. Результат округлите до сотых.

Ответ: ________________.

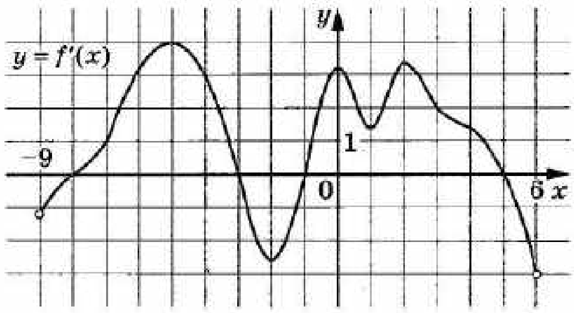
5 Решите уравнение $\sqrt{9-8x}=-x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Ответ: ________________.

6 Найдите значение выражения $\dfrac{2^{\log_9 3}}{2^{\log_9 243}}$.

Ответ:____________________.

7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9;\ 6)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



Ответ:____________________.

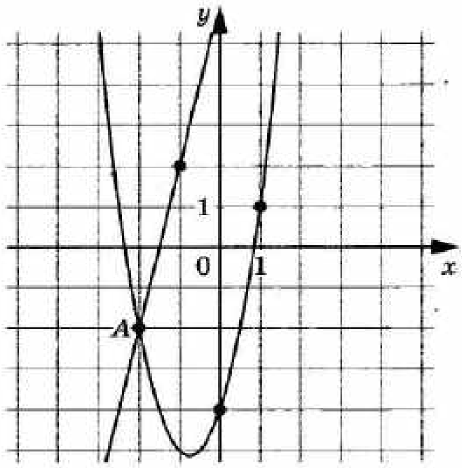
8 Груз массой 0,25 кг колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v = v_0 \cos\dfrac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T = 2$ с — период колебаний, $v_0 = 1{,}6$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \dfrac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, v — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 56 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Ответ:____________________.

9 Баржа в 10:00 вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 15 км от A. Пробыв 45 минут в пункте B, баржа отправилась назад и вернулась в пункт A в 16:00 того же дня. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость баржи равна 7 км/ч.

Ответ:____________________.

10 На рисунке изображены графики функций $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = kx + d$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Ответ:____________________.

11 Найдите наибольшее значение функции $y = x^5 + 5x^3 - 140x$ на отрезке $[-8;\ -1]$.

Ответ:____________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $\sin 2x + \cos 2x = 1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

13 В правильной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ боковое ребро равно $\sqrt{3}$, а сторона основания равна 2. Через точку A_1 перпендикулярно плоскости AB_1D_1 проведена прямая l.

а) Докажите, что прямая l пересекает отрезок AC и делит его в отношении $3:1$.

б) Найдите угол между прямыми l и CB_1.

14 Решите неравенство $7^{\log_{\frac{1}{7}} \log_{\frac{1}{2}}(-x)} < 2^{\log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{7}}(-x)}$.

15 В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 300 тыс. рублей на 6 лет. Условия его возврата таковы:
- в январе 2026, 2027 и 2028 годов долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
- в январе 2029, 2030 и 2031 годов долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2031 года кредит должен быть полностью погашен.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 498 тысяч рублей. Найдите r.

16 Около окружности с центром O описана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC.

а) Докажите, что $\angle AOB = \angle COD = 90°$.

б) Найдите отношение большего основания трапеции к меньшему, если известно, что $AB = CD$, а площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами трапеции составляет $\frac{12}{49}$ площади трапеции $ABCD$.

17 Найдите все такие значения a, при каждом из которых неравенство

$$-1 \le \sin x(a - \cos 2x) \le 1$$

верно при всех действительных значениях x.

18 Отношение трёхзначного натурального числа к сумме его цифр — целое число.

а) Может ли это отношение быть равным 34?

б) Может ли это отношение быть равным 84?

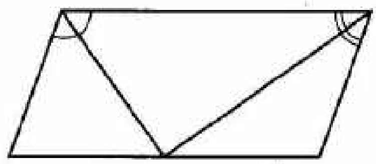
в) Какое наименьшее значение может принимать это отношение, если первая цифра трёхзначного числа равна 4?

ВАРИАНТ 16

Часть 1

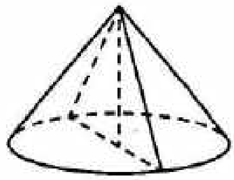
Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 6. Найдите его бо́льшую сторону.



Ответ: ________________.

2 Диаметр основания конуса равен 32, а длина образующей равна 20. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.



Ответ: ________________.

3 Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже чем 36,8 °C, равна 0,71. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура окажется 36,8 °C или выше.

Ответ: ________________.

4 Биатлонист 5 раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 3 раза попал в мишени, а последние 2 раза промахнулся. Результат округлите до сотых.

Ответ: ________________.

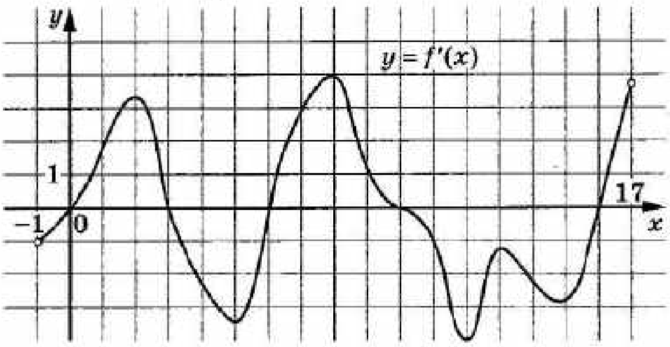
5 Решите уравнение $\sqrt{72+x}=-x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Ответ: ________________.

6 Найдите значение выражения $\dfrac{2^{\log_6 2}}{2^{\log_6 432}}$.

Ответ: ________________.

✓ **7** На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-1;\ 17)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



Ответ: ____________________.

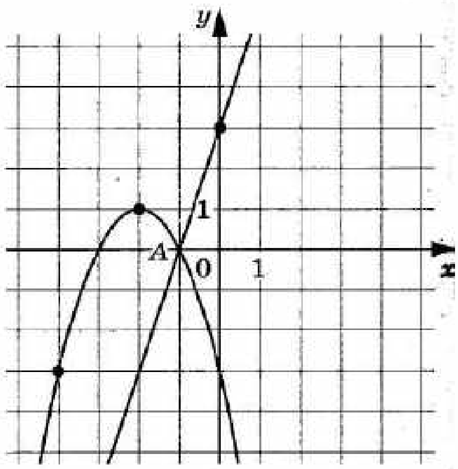
8 Груз массой 0,58 кг колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v = v_0 \cos\frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T = 2$ с — период колебаний, $v_0 = 2$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, v — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 50 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Ответ: ____________________.

9 Лодка в 5:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 30 км от А. Пробыв 2 часа в пункте В, лодка отправилась назад и вернулась в пункт А в 23:00 того же дня. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость лодки равна 4 км/ч.

Ответ: ____________________.

10 На рисунке изображены графики функций $f(x) = 3x + 3$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках $A(-1;\ 0)$ и $B(x_0;\ y_0)$. Найдите y_0.



Ответ: ____________________.

11 Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 8{,}5x^2 + 10x - 13$.

Ответ:___________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $\cos 2x + \sin 2x + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

13 В правильной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ боковое ребро равно 2, а сторона основания равна $\sqrt{6}$. Через точку A_1 перпендикулярно плоскости AB_1D_1 проведена прямая l.

а) Докажите, что прямая l пересекает отрезок AC и делит его в отношении $2:1$.

б) Найдите угол между прямыми l и CD_1.

14 Решите неравенство $5^{\log_{\frac{1}{5}} \log_3(-2x)} < 3^{\log_{\frac{1}{3}} \log_5(-2x)}$.

15 В июле 2023 года планируется взять кредит на 8 лет в размере 800 тыс. рублей. Условия возврата таковы:
- каждый январь с 2024 по 2027 год долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;
- каждый январь с 2028 по 2031 год долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2031 года кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r, если общая сумма выплат по кредиту должна составить 1444 тыс. рублей.

16 Около окружности с центром O описана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC.

а) Докажите, что треугольник AOB прямоугольный.

б) Найдите отношение большего основания трапеции к меньшему, если известно, что $AB = CD$, а площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами трапеции составляет $\frac{16}{81}$ площади трапеции $ABCD$.

17 Найдите все такие значения a, при каждом из которых неравенство

$$-1 \le \cos x(\cos 2x - a - 1) \le 1$$

верно при всех действительных значениях x.

18 Отношение трёхзначного натурального числа к сумме его цифр — целое число.

а) Может ли это отношение быть равным 11?

б) Может ли это отношение быть равным 5?

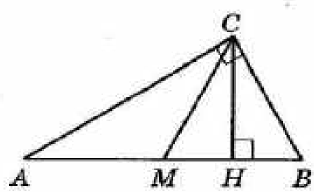
в) Какое наибольшее значение может принимать это отношение, если число не делится на 100 и его первая цифра равна 7?

ВАРИАНТ 17

Часть 1

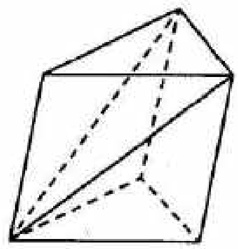
Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

✓ **1** Острый угол B прямоугольного треугольника равен 50°. Найдите угол между высотой CH и медианой CM, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



Ответ:__________________.

✓ **2** От треугольной призмы, объём которой равен 120, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через сторону одного основания и противоположную вершину другого основания. Найдите объём оставшейся части.



Ответ:__________________.

✓ **3** Перед началом первого тура чемпионата по шашкам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвуют 26 шашистов, среди которых 3 спортсмена из России, в том числе Василий Лукин. Найдите вероятность того, что в первом туре Василий Лукин будет играть с каким-либо шашистом из России.

Ответ:__________________.

✓ **4** Игральный кубик бросают дважды. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Найдите вероятность того, что в первый раз выпало 2 очка.

Ответ:__________________.

✓ **5** Найдите корень уравнения $\log_9 3^{2x+9} = 2$.

Ответ:__________________.

✓ **6** Найдите значение выражения $\frac{a^{5,96} \cdot a^{2,4}}{a^{5,36}}$ при $a = 6$.

Ответ:__________________.

7 Прямая $y = 5x + 11$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 4x^2 + 9x + 11$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: ____________________.

8 Расстояние от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землёй, выраженное в километрах, до видимой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 24 км. К пляжу ведёт лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 20 см. На какое наименьшее количество ступенек нужно подняться человеку, чтобы он увидел горизонт на расстоянии не менее 32 км?

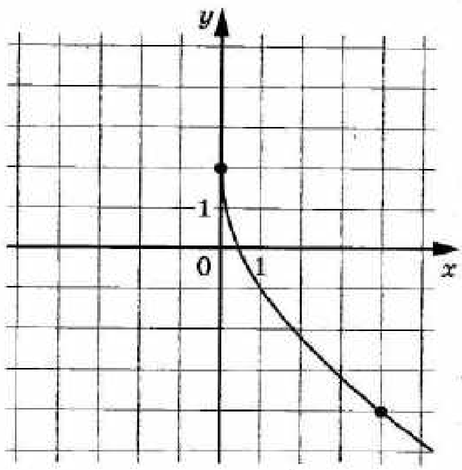
Ответ: ____________________.

9 Первый садовый насос перекачивает 8 литров воды за 4 минуты, второй насос перекачивает тот же объём воды за 6 минут. Сколько минут эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 60 литров воды?

Ответ: ____________________.

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x} + p$. Найдите значение x, при котором $f(x) = -10$.

Ответ: ____________________.



11 Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+25)^{11} - 11x + 5$.

Ответ: ____________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $5\sin x - 4\sin^3 x = 2\sin 2x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

13 Основание пирамиды $SABC$ — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. Высота пирамиды проходит через точку B.

а) Докажите, что середина ребра SA равноудалена от вершин B и C.

б) Найдите угол между плоскостью SBC и прямой, проходящей через середины рёбер BC и SA, если известно, что $BS = AC$.

14 Решите неравенство $\log_2^2\left(x^4\right) - 4\log_{0,25}\left(x^2\right) \geq 12$.

15 Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 2x^2 + 5x + 10$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через 12 лет суммарная прибыль может составить не менее 744 млн рублей при некотором значении x?

16 Точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон соответственно BC, AC и AB остроугольного треугольника ABC.

а) Докажите, что окружности, описанные около треугольников A_1CB_1, A_1BC_1 и B_1AC_1, пересекаются в одной точке.

б) Известно, что $AB = AC = 13$ и $BC = 10$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершины которого — центры окружностей, описанных около треугольников A_1CB_1, A_1BC_1 и B_1AC_1.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x-2a+2)^2+(y+a-2)^2 = a+\frac{5}{2}, \\ x+y = 1-a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

18 Для действительного числа x обозначим через $[x]$ наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, $\left[\frac{11}{4}\right]=2$, так как $2\le\frac{11}{4}<3$.

а) Существует ли такое натуральное число n, что $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{7}\right]=n$?

б) Существует ли такое натуральное число n, что $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]=n+2$?

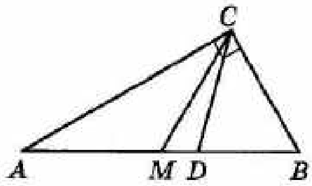
в) Сколько существует различных натуральных n, для которых $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{9}\right]+\left[\frac{n}{17}\right]=n+1945$?

ВАРИАНТ 18

Часть 1

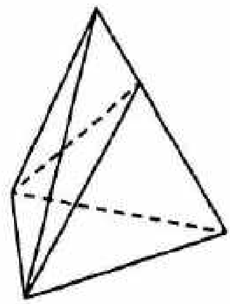
Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Угол между биссектрисой CD и медианой CM, проведёнными из вершины прямого угла C треугольника ABC, равен 10°. Найдите меньший угол этого треугольника. Ответ дайте в градусах.



Ответ:________________.

2 Объём треугольной пирамиды равен 14. Плоскость проходит через сторону основания этой пирамиды и пересекает противоположное боковое ребро в точке, делящей его в отношении 2 : 5, считая от вершины пирамиды. Найдите больший из объёмов пирамид, на которые плоскость разбивает исходную пирамиду.



Ответ:________________.

3 Перед началом первого тура чемпионата по шахматам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвуют 16 шахматистов, среди которых 4 спортсмена из России, в том числе Фёдор Волков. Найдите вероятность того, что в первом туре Фёдор Волков будет играть с каким-либо шахматистом из России.

Ответ:________________.

4 Игральный кубик бросили один или несколько раз. Оказалось, что сумма всех выпавших очков равна 3. Какова вероятность того, что было сделано два броска? Ответ округлите до сотых.

Ответ:________________.

5 Найдите корень уравнения $\log_4 2^{5x+7} = 3$.

Ответ:________________.

✓ **6** Найдите значение выражения $\dfrac{a^{3,33}}{a^{2,11}\cdot a^{2,22}}$ при $a=\dfrac{2}{7}$.

Ответ: ________________.

7 Прямая $y=9x+6$ является касательной к графику функции $y=ax^2-19x+13$. Найдите a.

Ответ: ________________.

8 Расстояние от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землёй, выраженное в километрах, до видимой им линии горизонта вычисляется по формуле $l=\sqrt{\dfrac{Rh}{500}}$, где $R=6400$ км — радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4 км. На сколько метров нужно подняться человеку, чтобы расстояние до горизонта увеличилось до 24 км?

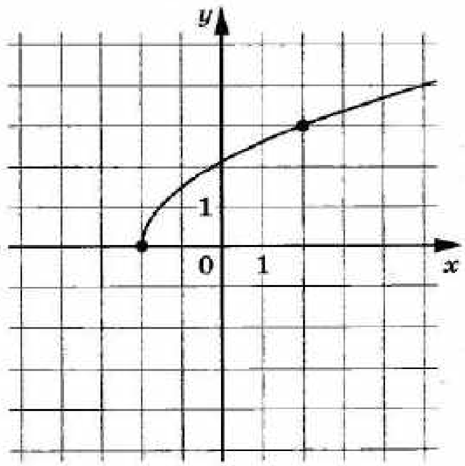
Ответ: ________________.

9 Первый садовый насос перекачивает 10 литров воды за 5 минут, второй насос перекачивает тот же объём воды за 7 минут. Сколько минут эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 72 литра воды?

Ответ: ________________.

10 На рисунке изображён график функции $f(x)=k\sqrt{x+p}$. Найдите $f(0{,}25)$.

Ответ: ________________.



✓ **11** Найдите наибольшее значение функции $y=2x^2-12x+8\ln x-5$ на отрезке $\left[\dfrac{12}{13};\dfrac{14}{13}\right]$.

Ответ: ________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $7\cos x - 4\cos^3 x = 2\sqrt{3}\sin 2x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-4\pi; -3\pi]$.

13 Основание пирамиды $SABC$ — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. Высота пирамиды проходит через точку B.

а) Докажите, что середина ребра SA равноудалена от вершин B и C.

б) Найдите угол между плоскостью SBC и прямой, проходящей через середины рёбер BC и SA, если известно, что $BS = 2AC$.

14 Решите неравенство $\log_5^2(x^4) - 28\log_{0,04}(x^2) \le 8$.

15 Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 3x^2 + 6x + 13$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через пять лет суммарная прибыль может составить не менее 70 млн рублей при некотором значении x?

16 Точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон соответственно BC, AC и AB остроугольного треугольника ABC.

а) Докажите, что окружности, описанные около треугольников A_1CB_1, A_1BC_1 и B_1AC_1, пересекаются в одной точке.

б) Известно, что $AB = AC = 17$ и $BC = 16$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершины которого — центры окружностей, описанных около треугольников A_1CB_1, A_1BC_1 и B_1AC_1.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x-a+3)^2 + (y+a-2)^2 = a + \dfrac{7}{2}, \\ x - y = a - 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

18 Для действительного числа x обозначим через $[x]$ наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, $\left[\frac{11}{4}\right]=2$, так как $2\le\frac{11}{4}<3$.

а) Существует ли такое натуральное число n, что $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{9}\right]=n$?

б) Существует ли такое натуральное число n, что $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{5}\right]=n+2$?

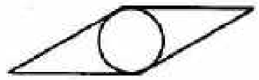
в) Сколько существует различных натуральных n, для которых $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{8}\right]+\left[\frac{n}{23}\right]=n+2021$?

ВАРИАНТ 19

Часть 1

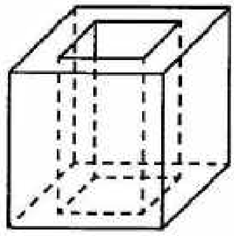
Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

✓ **1** Сторона ромба равна 10, острый угол равен 30°. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб.



Ответ:__________________.

2 Из единичного куба вырезана правильная четырёхугольная призма со стороной основания 0,4 и боковым ребром 1. Найдите площадь полной поверхности получившейся фигуры.



Ответ:__________________.

✓ **3** Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 7, но не дойдя до отметки 10.

Ответ:__________________.

4 В классе 26 учащихся, среди них три подружки — Оля, Аня и Юля. Класс случайным образом разбивают на две равные группы. Найдите вероятность того, что все три девочки окажутся в одной группе.

Ответ:__________________.

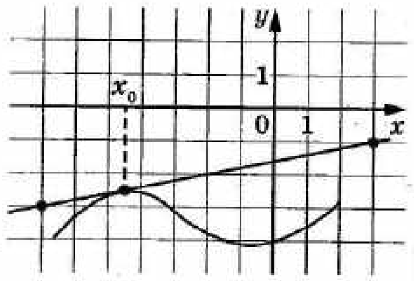
5 Решите уравнение $\operatorname{tg}\frac{\pi(2x+5)}{6}=\sqrt{3}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

Ответ:__________________.

6 Найдите $\frac{g(10-x)}{g(10+x)}$, если $g(x)=\sqrt[3]{x(20-x)}$, при $|x|\neq 10$.

Ответ:__________________.

✓ **7** На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:____________________.

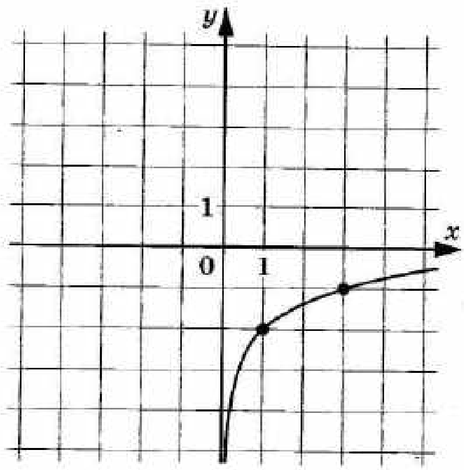
8 Амплитуда колебаний маятника зависит от частоты вынуждающей силы и определяется по формуле $A(\omega) = \frac{A_0\omega_p^2}{\left|\omega_p^2 - \omega^2\right|}$, где ω — частота вынуждающей силы (в $с^{-1}$), A_0 — постоянный параметр, $\omega_p = 345$ $с^{-1}$ — резонансная частота. Найдите максимальную частоту ω, меньшую резонансной, для которой амплитуда колебаний превосходит величину A_0 не более чем на $12{,}5\,\%$. Ответ дайте в $с^{-1}$.

Ответ:____________________.

9 Расстояние между городами A и B равно 180 км. Из города A в город B выехал автомобиль, а через 3 часа следом за ним со скоростью 90 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе C и повернул обратно. Когда он вернулся в A, автомобиль прибыл в B. Найдите расстояние от A до C. Ответ дайте в километрах.

Ответ:____________________.

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите $f(81)$.



Ответ:____________________.

11 Найдите точку максимума функции $y = (x+35)e^{35-x}$.

Ответ:____________________.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $16\log_9^2 x + 4\log_{\frac{1}{3}} x - 3 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0{,}5;\ 5]$.

13 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка K — середина ребра AA_1, а $AB = AA_1$. Плоскость α проходит через точки K и B_1 параллельно прямой BC_1.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро A_1C_1 в отношении $1:2$.

б) Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости α, если $AB = 6$.

14 Решите неравенство $25 \cdot 4^{\frac{1}{2}-\frac{2}{x}} - 133 \cdot 10^{-\frac{2}{x}} + 4 \cdot 5^{1-\frac{4}{x}} \le 0$.

15 В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 650 тыс. рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы:
- в январе 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг возрастает на 19 % по сравнению с концом предыдущего года;
- в январе 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг возрастает на 16 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года кредит должен быть полностью погашен.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

16 В трапеции $ABCD$ основание AD в два раза меньше основания BC. Внутри трапеции взяли точку M так, что углы BAM и CDM прямые.

а) Докажите, что $BM = CM$.

б) Найдите угол ABC, если угол BCD равен $64°$, а расстояние от точки M до прямой BC равно стороне AD.

17 Найдите все такие значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{5-7x} \cdot \ln(9x^2 - a^2) = \sqrt{5-7x} \cdot \ln(3x + a)$$

имеет ровно один корень.

18 На доске написано 11 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 8, а среднее арифметическое семи наибольших равно 14.

а) Может ли наибольшее из этих одиннадцати чисел равняться 16?

б) Может ли среднее арифметическое всех одиннадцати чисел равняться 10?

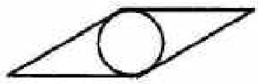
в) Найдите наименьшее значение среднего арифметического всех одиннадцати чисел.

ВАРИАНТ 20

Часть 1

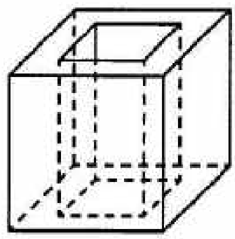
Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Радиус окружности, вписанной в ромб, равен 1,5. Найдите сторону ромба, если один из его углов равен 30°.



Ответ:__________________.

2 Из единичного куба вырезана правильная четырёхугольная призма со стороной основания 0,6 и боковым ребром 1. Найдите площадь полной поверхности получившейся фигуры.



Ответ:__________________.

3 Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 2, но не дойдя до отметки 11.

Ответ:__________________.

4 В группе туристов 15 человек, в том числе три друга — Юра, Боря и Егор. Группу случайным образом разбивают на три равные подгруппы. Найдите вероятность того, что все трое окажутся в разных подгруппах. Ответ округлите до сотых.

Ответ:__________________.

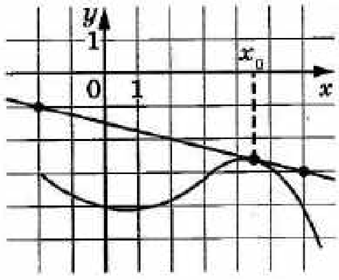
5 Решите уравнение $\sin\frac{\pi(2x+7)}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

Ответ:__________________.

6 Найдите $5(4p(x+2)-p(4x))$, если $p(x)=x-2$.

Ответ:__________________.

7 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:____________________.

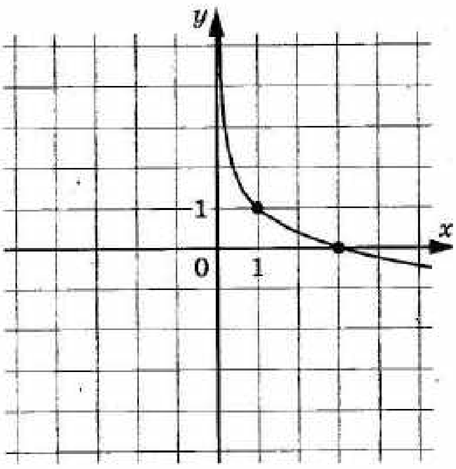
8 Амплитуда колебаний маятника зависит от частоты вынуждающей силы и определяется по формуле $A(\omega) = \frac{A_0\omega_p^2}{\left|\omega_p^2 - \omega^2\right|}$, где ω — частота вынуждающей силы (в c^{-1}), A_0 — постоянный параметр, $\omega_p = 330\ c^{-1}$ — резонансная частота. Найдите максимальную частоту ω, меньшую резонансной, для которой амплитуда колебаний превосходит величину A_0 не более чем на 80 %. Ответ дайте в c^{-1}.

Ответ:____________________.

9 Расстояние между городами А и В равно 84 км. Из города А в город В выехал автомобиль, а через 30 минут следом за ним со скоростью 65 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите расстояние от А до С. Ответ дайте в километрах.

Ответ:____________________.

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите значение x, при котором $f(x) = -2$.



Ответ:____________________.

✓ **11** Найдите наименьшее значение функции $y=(x+4)^2 e^{-4-x}$ на отрезке $[-5; -3]$.

Ответ:__________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $36\log^2_{\frac{1}{8}} x+4\log_{\frac{1}{4}} x-5=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0,5; 5]$.

13 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки K и N — соответственно середины рёбер AA_1 и AC. Плоскость α проходит через точки K и N параллельно прямой CB_1.

а) Докажите, что сечением призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α является равнобедренная трапеция.

б) Найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью α, если $AB=4$, $AA_1=\sqrt{3}$.

14 Решите неравенство $4\cdot 9^{1-\frac{5}{x}}-91\cdot 12^{-\frac{5}{x}}+3\cdot 4^{2-\frac{10}{x}}\geq 0$.

15 В июле 2023 года планируется взять кредит на 12 лет в размере 1200 тыс. рублей. Условия возврата таковы:

– каждый январь с 2024 по 2029 год долг возрастает на 18 % по сравнению с концом предыдущего года;
– каждый январь с 2030 по 2035 год долг возрастает на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;
– к июлю 2035 года кредит должен быть полностью погашен.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

16 Точка K лежит на отрезке AB. Прямая, проходящая через точку B, касается окружности с диаметром AK в точке N и второй раз пересекает окружность с диаметром BK в точке M. Продолжение отрезка NK пересекает окружность с диаметром BK в точке P.

а) Докажите, что прямые AN и BP параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKP, если $BM = 1$ и $MN = 4$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(7x-6)\cdot\ln(x+a)=(7x-6)\cdot\ln(4x-a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

18 На доске написано более 35, но менее 49 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно 5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 14, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -7.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

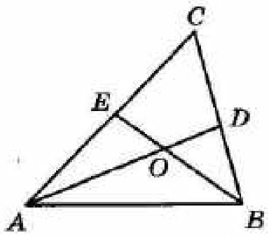
в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

ВАРИАНТ 21

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

✓ **1** В треугольнике ABC угол C равен 46°, AD и BE — биссектрисы, пересекающиеся в точке O. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.



Ответ:________________.

2 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми DC_1 и BD. Ответ дайте в градусах.

Ответ:________________.

✓ **3** В классе 16 учащихся, среди них два друга — Михаил и Андрей. Класс случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Михаил и Андрей окажутся в одной группе.

Ответ:________________.

✓ **4** Помещение освещается фонарём с тремя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Ответ:________________.

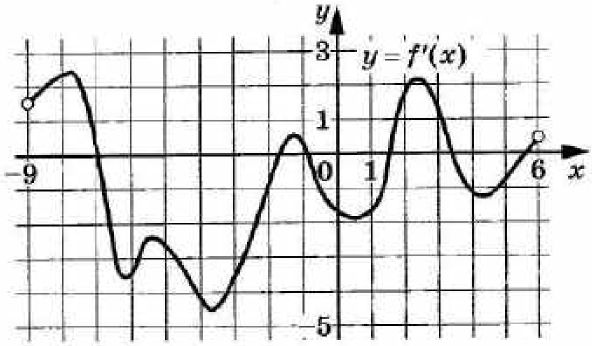
✓ **5** Найдите корень уравнения $\frac{1}{2x-3}=\frac{1}{8}$.

Ответ:________________.

6 Найдите значение выражения $4^{1-2\log_{0,5}3}$.

Ответ:________________.

7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-8; 5]$.



Ответ:____________________.

8 Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a (в км/ч^2). Скорость v (в км/ч) вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь (в км). Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,8 км, приобрести скорость 100 км/ч. Ответ дайте в км/ч^2.

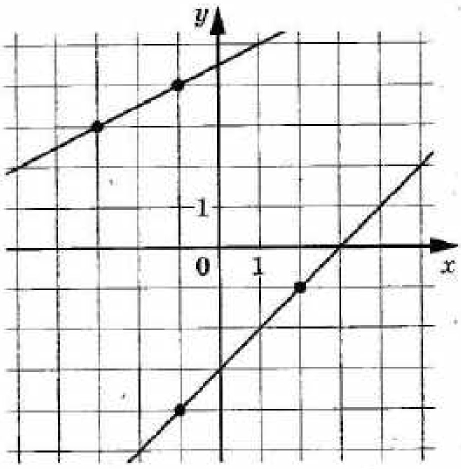
Ответ:____________________.

9 Катер в 8:40 вышел из пункта А в пункт В, расположенный в 48 км от А. Пробыв 40 минут в пункте В, катер отправился назад и вернулся в пункт А в 16:20 того же дня. Найдите собственную скорость катера (в км/ч), если известно, что скорость течения реки 2 км/ч.

Ответ:____________________.

10 На рисунке изображены графики двух функций вида $y = kx + b$, которые пересекаются в точке $A(x_0; y_0)$. Найдите x_0.

Ответ:____________________.



✓ **11** Найдите наименьшее значение функции $y = 4\sin x - 6x + 7$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};\, 0\right]$.

Ответ: ________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin 2x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\, \frac{9\pi}{2}\right]$.

13 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания AB равна 2, а боковое ребро SA равно 8. Точка M — середина ребра AB. Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит точки M и D. Прямая SC пересекает плоскость α в точке K.

а) Докажите, что $KM = KD$.

б) Найдите объём пирамиды $CDKM$.

14 Решите неравенство $x^2 \log_{64}(3 - 2x) \geq \log_2(4x^2 - 12x + 9)$.

15 В июле 2022 года планируется взять кредит на пять лет в размере 1050 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2023, 2024 и 2025 годов долг остаётся равным 1050 тыс. рублей;
- выплаты в 2026 и 2027 годах равны;
- к июлю 2027 года долг будет выплачен полностью.

На сколько рублей последняя выплата будет больше первой?

16 Две окружности касаются внутренним образом в точке C. Вершины A и B равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежат на меньшей и большей окружностях соответственно. Прямая AC вторично пересекает бóльшую окружность в точке E, а прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и BE параллельны.

б) Найдите AC, если радиусы окружностей равны 3 и 4.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{16-y^2}=\sqrt{16-a^2x^2},\\ x^2+y^2=8x+4y\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

18 На доске было написано несколько различных натуральных чисел. Эти числа разбили на три группы, в каждой из которых оказалось хотя бы одно число. К каждому числу из первой группы приписали справа цифру 3, к каждому числу из второй группы — цифру 7, а числа из третьей группы оставили без изменений.

а) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 8 раз?

б) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 17 раз?

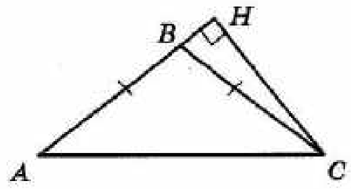
в) В какое наибольшее число раз могла увеличиться сумма всех этих чисел?

ВАРИАНТ 22

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В треугольнике ABC высота CH равна 6, $AB = BC$, $AC = 8$. Найдите синус угла ACB.



Ответ: __________________.

2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 2, найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1. Ответ дайте в градусах.

Ответ: __________________.

✓ **3** Всего в группе туристов 21 человек, в том числе Женя и Саша. Группу случайным образом делят на три подгруппы по 7 человек для посадки в три микроавтобуса. Какова вероятность того, что Женя и Саша случайно окажутся в одном микроавтобусе?

Ответ: __________________.

✓ **4** Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,16. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Ответ: __________________.

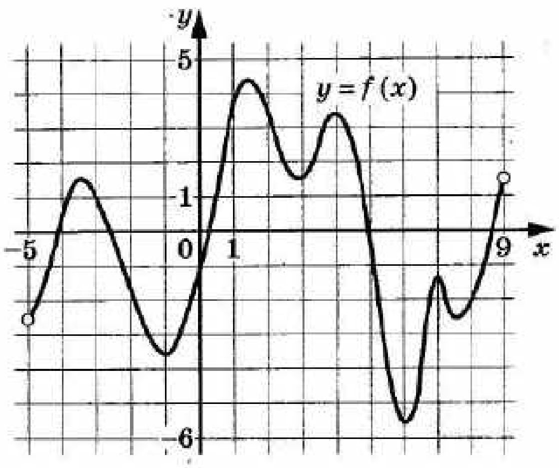
✓ **5** Найдите корень уравнения $\dfrac{1}{5x-14}=\dfrac{1}{4x-3}$.

Ответ: __________________.

6 Найдите значение выражения $\dfrac{\log_9 32}{\log_{27} 0{,}5}$.

Ответ: __________________.

✓ **7** На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 9)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[-2; 8]$.



Ответ:____________________.

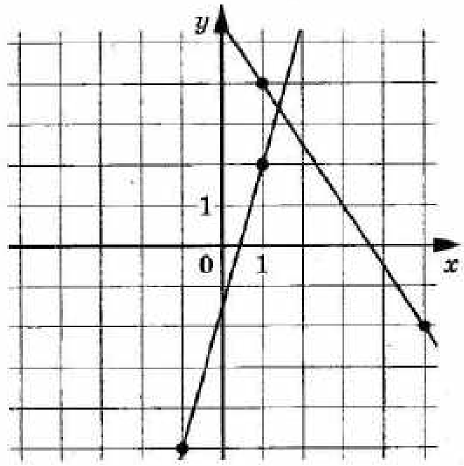
8 Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением $a = 6500$ км/ч^2. Скорость v (в км/ч) вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь (в км). Найдите, сколько километров проедет автомобиль к моменту, когда он разгонится до скорости 130 км/ч.

Ответ:____________________.

9 Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 416 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 21 км/ч, стоянка длится 8 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 50 часов. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:____________________.

10 На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите ординату точки пересечения графиков.



Ответ:____________________.

✓ **11** Найдите точку максимума функции $y=(5x-6)\cos x-5\sin x-8$, принадлежащую промежутку $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ:__________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $\cos 2x-\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-1=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$.

13 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=8$ и $BC=6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=\sqrt{21}$, $SB=\sqrt{85}$, $SD=\sqrt{57}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямыми SC и BD.

14 Решите неравенство $x^2\log_{243}(-x-3)\geq\log_3\left(x^2+6x+9\right)$.

15 В июле 2022 года планируется взять кредит на пять лет в размере 220 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на $r\,\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2023, 2024 и 2025 годов долг остаётся равным 220 тыс. рублей;
- выплаты в 2026 и 2027 годах равны;
- к июлю 2027 года долг будет выплачен полностью.

Найдите r, если общий размер выплат составит 420 тыс. рублей.

16 Две окружности разных радиусов касаются внешним образом в точке C. Вершины A и B равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежат на меньшей и большей окружностях соответственно. Прямая AC вторично пересекает бо́льшую окружность в точке E, а прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и BE параллельны.

б) Найдите BC, если радиусы окружностей равны $\sqrt{15}$ и 15.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{a-y^2}=\sqrt{a-x^2},\\ x^2+y^2=2x+4y\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

18 На доске было написано несколько различных натуральных чисел. Эти числа разбили на три группы, в каждой из которых оказалось хотя бы одно число. К каждому числу из первой группы приписали справа цифру 1, к каждому числу из второй группы — цифру 8, а числа из третьей группы оставили без изменений.

а) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 4 раза?

б) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 18 раз?

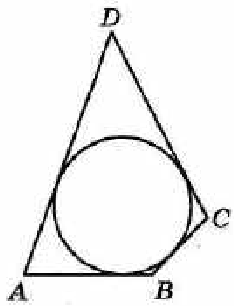
в) Сумма всех этих чисел увеличилась в 11 раз. Какое наибольшее количество чисел могло быть написано на доске?

ВАРИАНТ 23

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

✓ **1** В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 13$, $CD = 18$. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$.



Ответ:____________________.

2 Радиусы двух шаров равны 7 и 24. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.

Ответ:____________________.

✓ **3** В гонке с раздельным стартом участвуют 25 лыжников, среди которых 7 спортсменов из Норвегии. Порядок старта определяется с помощью жребия случайным образом. Один из норвежских лыжников получил стартовый номер «5». Найдите вероятность, что он будет стартовать за своим соотечественником.

Ответ:____________________.

4 Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 95 % яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 45 % яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 60 % яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Ответ:____________________.

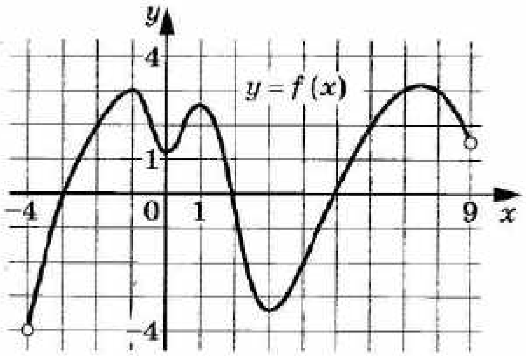
✓ **5** Найдите корень уравнения $\log_3(2-x)=\log_9 16$.

Ответ:____________________.

6 Найдите значение выражения $\dfrac{8^{2,8}\cdot 5^{3,2}}{20^{2,2}}$.

Ответ:____________________.

✓ **7** На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-4; 9)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



Ответ:____________________.

8 Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Максимальная высота полёта мячика H (в м) вычисляется по формуле $H=\dfrac{v_0^2}{4g}(1-\cos 2\alpha)$, где $v_0=12$ м/с — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считайте $g=10$ м/с^2). При каком наименьшем значении угла α мячик пролетит над стеной высотой 4,4 м на расстоянии 1 м? Ответ дайте в градусах.

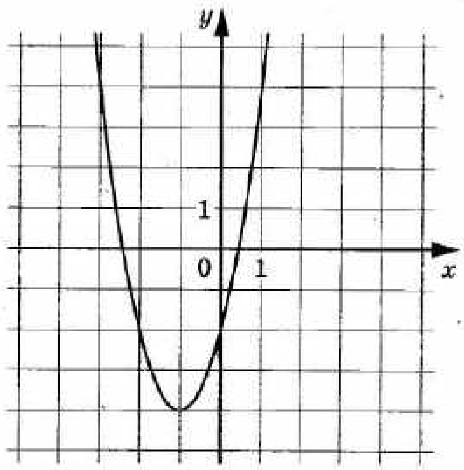
Ответ:____________________.

9 Имеется два сплава. Первый содержит 50 % никеля, второй — 15 % никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 175 кг, содержащий 25 % никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

Ответ:____________________.

10 На рисунке изображён график функции $f(x)=2x^2+bx+c$, где числа b и c — целые. Найдите $f(-5)$.

Ответ:____________________.



11 Найдите наибольшее значение функции $y=3x^5-5x^3+16$ на отрезке $[-4;\ 0]$.

Ответ:____________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $\left(x^2+2x-1\right)\left(\log_2\left(x^2-3\right)+\log_{0,5}\left(\sqrt{3}-x\right)\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2,5;\ -1,5]$.

13 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно $\sqrt{21}$. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM=4$, $SK:KB=1:3$.

а) Докажите, что плоскость CKM перпендикулярна плоскости ABC.

б) Найдите объём пирамиды $BCKM$.

14 Решите неравенство $\dfrac{4^{x-0,5}+1}{9\cdot 4^x-16^{x+0,5}-2}\le 0,5$.

15 Алексей планирует 15 декабря взять в банке кредит на 2 года в размере 1 806 000 рублей. Сотрудник банка предложил Алексею два различных варианта погашения кредита, описание которых приведено в таблице.

Вариант 1	– каждый январь долг возрастает на 15 % по сравнению с концом предыдущего года; – с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга; – кредит должен быть полностью погашен за два года двумя равными платежами
Вариант 2	– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2 % по сравнению с концом предыдущего месяца; – со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; – 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца; – к 15-му числу 24-го месяца кредит должен быть полностью погашен

На сколько рублей меньше окажется общая сумма выплат банку по более выгодному для Алексея варианту погашения кредита?

16 В четырёхугольнике $ABCD$ противоположные стороны не параллельны. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O под прямым углом и образуют четыре подобных треугольника, у каждого из которых одна из вершин — точка O.

а) Докажите, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность.

б) Найдите радиус вписанной окружности, если $AC = 10$, $BD = 26$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{5}{x} + 3 - y = \left| y - 2 + \dfrac{3}{x} \right|, \\ 2y(y-4) + 3x(ax+4) = xy(2a+3) \end{cases}$$

имеет больше трёх решений.

18 Петя участвовал в викторине по истории. За каждый правильный ответ участнику начисляется 8 баллов, за каждый неверный — списывается 8 баллов, за отсутствие ответа списывается 3 балла. По результатам викторины Петя набрал 35 баллов.

а) На сколько вопросов Петя не дал ответа, если в викторине было 30 вопросов?

б) На сколько вопросов Петя не дал ответа, если в викторине было 35 вопросов?

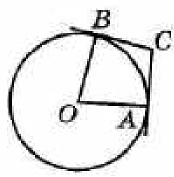
в) На сколько вопросов Петя ответил правильно, если в викторине было 33 вопроса?

ВАРИАНТ 24

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

✓ **1** Через концы A и B дуги окружности с центром O проведены касательные CA и CB. Угол CAB равен 39°. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.



Ответ:___________________.

2 Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 60. Найдите объём треугольной пирамиды ACB_1D_1.

Ответ:___________________.

✓ **3** В гонке с раздельным стартом участвуют 16 лыжников, среди которых 4 спортсмена из Швеции. Порядок старта определяется с помощью жребия случайным образом. Один из шведских лыжников получил стартовый номер «10». Найдите вероятность, что он будет стартовать за своим соотечественником.

Ответ:___________________.

4 На фабрике керамической посуды 30 % произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 50 % дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

Ответ:___________________.

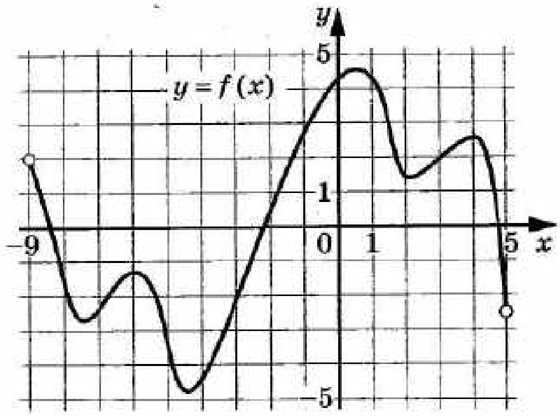
5 Найдите корень уравнения $\log_{0,5}(x+5)=\log_2 0,2$.

Ответ:___________________.

6 Найдите значение выражения $\dfrac{14^{6,4}\cdot 7^{-5,4}}{4^{2,2}}$.

Ответ:___________________.

✓ **7** На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 5)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Ответ: ________________.

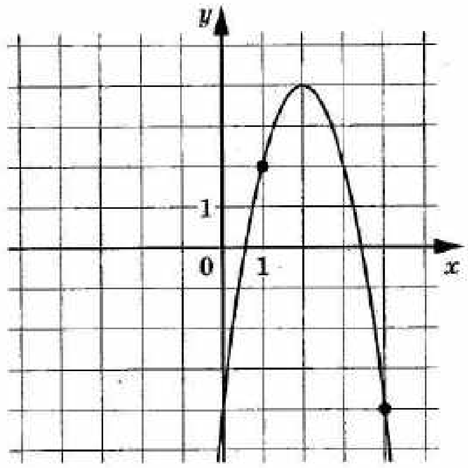
✓ **8** Мяч бросили под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. При каком значении угла α (в градусах) время полёта составит 1,4 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 14$ м/с^2? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Ответ: ________________.

9 Смешали 3 кг 24-процентного раствора, 4 кг 32-процентного раствора и некоторое количество 48-процентного раствора одного и того же вещества. Сколько килограммов 48-процентного раствора использовали, если в результате получили 40-процентный раствор вещества?

Ответ: ________________.

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + 8x + c$. Найдите $f(6)$.



Ответ: ________________.

11 Найдите точку минимума функции $y=(x+4)^2(x+1)+9$.

Ответ:__________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $(x^2+4x-2)(4^{3x+1}+8^{2x-1}-11)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-0{,}5;\ 0{,}5]$.

13 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 8, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM=2$, $SK=1$. Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит точки M и K.

а) Докажите, что плоскость α содержит точку C.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α.

14 Решите неравенство $\lg^4(x^2-26)^4-4\lg^2(x^2-26)^2\le 240$.

15 Виктор планирует 15 декабря взять в банке кредит на 2 года в размере 1 962 000 рублей. Сотрудник банка предложил Виктору два различных варианта погашения кредита, описание которых приведено в таблице.

Вариант 1	– каждый январь долг возрастает на 18 % по сравнению с концом предыдущего года; – с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга; – кредит должен быть полностью погашен за два года двумя равными платежами
Вариант 2	– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2 % по сравнению с концом предыдущего месяца; – со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; – 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца; – к 15-му числу 24-го месяца кредит должен быть полностью погашен

На сколько рублей меньше окажется общая сумма выплат банку по более выгодному для Виктора варианту погашения кредита?

16 В четырёхугольнике $ABCD$ противоположные стороны не параллельны. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O под прямым углом и образуют четыре подобных треугольника, у каждого из которых одна из вершин — точка O.

а) Докажите, что в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

б) Найдите радиус вписанной окружности, если $AC = 12$, $BD = 13$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y+2-\dfrac{4}{x}=\left|y+\dfrac{2}{x}-3\right|, \\ 2y(y+2)+3x(ax-2)=xy(2a+3) \end{cases}$$

имеет больше трёх решений.

18 Оля участвовала в викторине по истории. За каждый правильный ответ участнику начисляется 8 баллов, за каждый неверный — списывается 8 баллов, за отсутствие ответа списывается 3 балла. По результатам викторины Оля набрала 35 баллов.

а) На сколько вопросов Оля ответила правильно, если в викторине было 24 вопроса?

б) На сколько вопросов Оля не дала ответа, если в викторине было 25 вопросов?

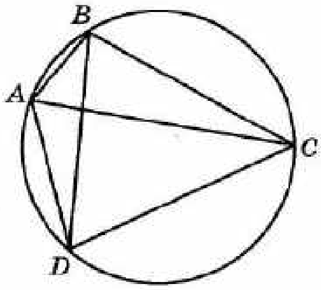
в) На сколько вопросов Оля ответила неверно, если в викторине было 37 вопросов?

ВАРИАНТ 25

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

✓ **1** Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен $106°$, угол CAD равен $69°$. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.



Ответ:__________________.

2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 9$, $BC = 6$, $AA_1 = 5$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, A_1, B_1.

Ответ:__________________.

✓ **3** В магазине в одной коробке лежат вперемешку ручки с чёрными, синими и красными чернилами, одинаковые на вид. Покупатель случайным образом выбирает одну ручку. Вероятность того, что она окажется чёрной, равна 0,37, а того, что она окажется синей, равна 0,45. Найдите вероятность того, что ручка окажется красной.

Ответ:__________________.

4 Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,2 при каждом отдельном выстреле. Сколько раз стрелок должен выстрелить по мишени, чтобы поразить её с вероятностью не менее 0,4?

Ответ:__________________.

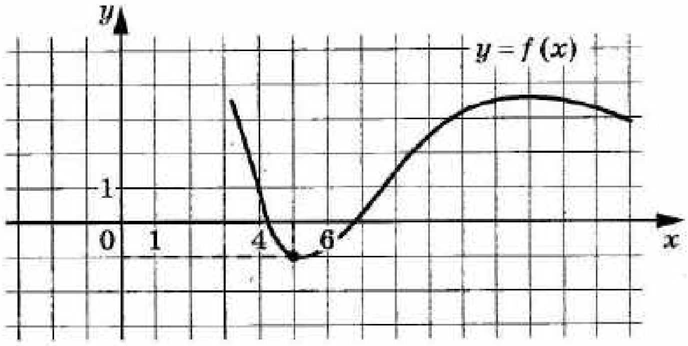
5 Найдите корень уравнения $\sqrt{5x} = 2\frac{1}{2}x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Ответ:__________________.

6 Найдите значение выражения $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{2}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Ответ:____________________.

✓ **7** На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 5. Найдите значение производной функции в точке $x_0 = 5$.



Ответ:____________________.

✓ **8** Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1V_1^{1,4} = p_2V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, а V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях соответственно. Изначально объём газа равен 192 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

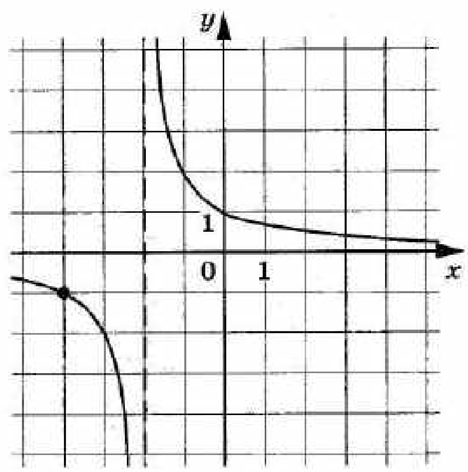
Ответ:____________________.

9 Две трубы, работая одновременно, наполняют бассейн за 18 часов 40 минут, а одна первая труба наполняет бассейн за 40 часов. За сколько часов наполняет бассейн одна вторая труба?

Ответ:____________________.

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x+a}$. Найдите $f(-7)$.

Ответ:____________________.



11 Найдите точку максимума функции $y=-\frac{x^2+196}{x}$.

Ответ:__________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $\sin^4\frac{x}{4}-\cos^4\frac{x}{4}=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};\ \pi\right]$.

13 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро AA_1 равно $5\sqrt{3}$. На ребре DD_1 отмечена точка M так, что $DM:MD_1=3:2$. Плоскость α параллельна прямой A_1F_1 и проходит через точки M и E.

а) Докажите, что сечение призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью α — равнобедренная трапеция.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка F, а основанием — сечение призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью α.

14 Решите неравенство $\left(2\cdot 0{,}5^{x+2}-0{,}5\cdot 2^{x+2}\right)\left(2\log_{0,5}^2(x+2)-0{,}5\log_2(x+2)\right)\le 0$.

15 15 января планируется взять кредит в банке на 2 года. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за 15-й месяц кредитования нужно выплатить 44 тыс. рублей. Сколько рублей нужно будет вернуть банку в течение всего срока кредитования?

16 В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, а угол BDC равен $75°$. Точка P лежит вне прямоугольника, а угол APB равен $150°$.

а) Докажите, что углы BAP и POB равны.

б) Прямая PO пересекает сторону CD в точке F. Найдите CF, если $AP = 6\sqrt{3}$ и $BP = 4$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых среди корней уравнения

$$3x^2 - 24x + 64 = a|x-3|$$

будет ровно три положительных.

18 У Миши в копилке есть 2-рублёвые, 5-рублёвые и 10-рублёвые монеты. Если взять 10 монет, то среди них обязательно найдётся хотя бы одна 2-рублёвая. Если взять 15 монет, то среди них обязательно найдётся хотя бы одна 5-рублёвая. Если взять 20 монет, то среди них обязательно найдётся хотя бы одна 10-рублёвая.

а) Может ли у Миши быть 30 монет?

б) Какое наибольшее количество монет может быть у Миши?

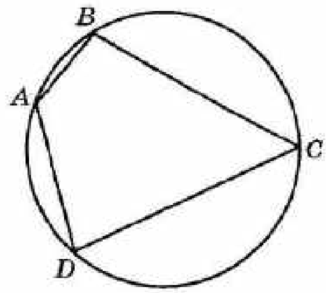
в) Какая наибольшая сумма рублей может быть у Миши?

ВАРИАНТ 26

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

✓ **1** Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол BAD равен $127°$. Найдите угол BCD. Ответ дайте в градусах.



Ответ:________________.

2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 9$, $BC = 8$, $AA_1 = 6$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, B_1.

Ответ:________________.

✓ **3** В магазине в одной коробке лежат вперемешку ручки с чёрными, синими и красными чернилами, одинаковые на вид. Покупатель случайным образом выбирает одну ручку. Вероятность того, что она окажется чёрной, равна 0,36, а того, что она окажется красной, равна 0,26. Найдите вероятность того, что ручка окажется синей.

Ответ:________________.

4 При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,3, а при каждом последующем — 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,97?

Ответ:________________.

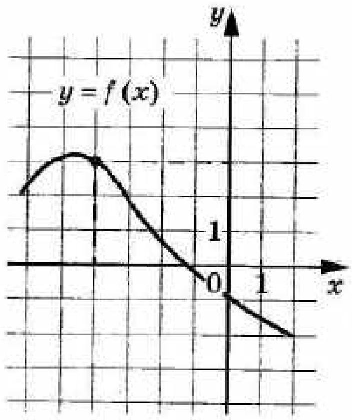
5 Найдите корень уравнения $\sqrt{-x} = x + 6$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Ответ:________________.

6 Найдите значение выражения $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{91}}{3}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Ответ:____________________.

✓ **7** На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой -4. Найдите значение производной функции в точке $x_0 = -4$.



Ответ:____________________.

8 Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с фокусным расстоянием $f = 60$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 95 см до 115 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 140 см до 160 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

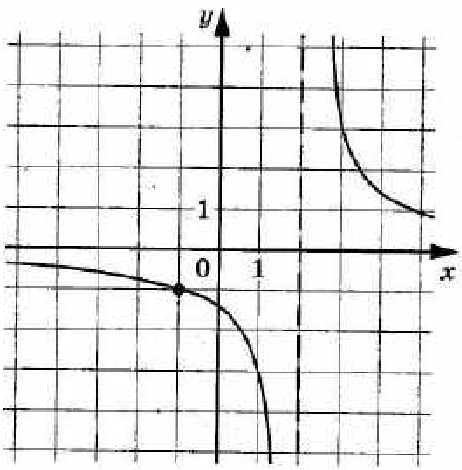
На каком наименьшем расстоянии от линзы нужно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким? Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ:____________________.

9 Первый и второй насосы наполняют бассейн за 35 минут, второй и третий — за 40 минут, а первый и третий — за 56 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

Ответ:____________________.

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x+a}$. Найдите значение x, при котором $f(x) = -0{,}2$.



Ответ:____________________.

✓ **11** Найдите наибольшее значение функции $y=(x-6)e^{7-x}$ на отрезке $[2;\ 15]$.

Ответ:__________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $\sin^2\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\sin^2\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=0{,}375\sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi;\ \pi]$.

13 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $5\sqrt{3}$. На ребре DD_1 отмечена точка M так, что $DM:MD_1=2:3$. Плоскость α параллельна прямой A_1F_1 и проходит через точки M и B.

а) Докажите, что сечение призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью α — равнобедренная трапеция.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка A_1, а основанием — сечение призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью α.

14 Решите неравенство $\left(5\cdot 0{,}2^{x+0,5}-0{,}2\cdot 5^{x+0,5}\right)\left(0{,}5\log^2_{0,2}(x+0{,}5)-2\log_5(x+0{,}5)\right)>0$.

15 15 января планируется взять кредит в банке на 3 года. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за 24-й месяц кредитования нужно выплатить 45,2 тыс. рублей. Сколько рублей нужно будет вернуть банку в течение всего срока кредитования?

16 В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, а угол BDC равен $22{,}5°$. Точка P лежит вне прямоугольника, а угол BPC равен $135°$.

а) Докажите, что углы BCP и POB равны.

б) Прямая PO пересекает сторону AD в точке F. Найдите DF, если $BP=7$ и $CP=5\sqrt{2}$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых среди корней уравнения

$$x^2-10x+35=a|x-6|$$

будет ровно два положительных.

18 У Коли в копилке есть 2-рублёвые, 5-рублёвые и 10-рублёвые монеты. Если взять 20 монет, то среди них обязательно найдётся хотя бы одна 2-рублёвая. Если взять 25 монет, то среди них обязательно найдётся хотя бы одна 5-рублёвая. Если взять 30 монет, то среди них обязательно найдётся хотя бы одна 10-рублёвая.

а) Может ли у Коли быть 50 монет?

б) Какое наибольшее количество монет может быть у Коли?

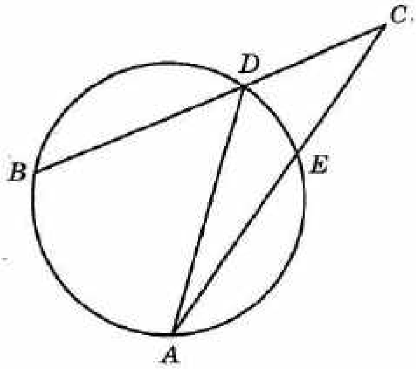
в) Какая наибольшая сумма рублей может быть у Коли?

ВАРИАНТ 27

Часть 1

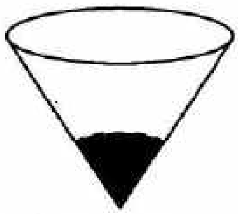
Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Градусная мера дуги AB окружности, не содержащей точку D, равна 106°. Градусная мера дуги DE окружности, не содержащей точку A, равна 48°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



Ответ:____________________.

2 В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает 0,25 высоты. Объём жидкости равен 5 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



Ответ:____________________.

3 В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 6. Результат округлите до сотых.

Ответ:____________________.

4 По отзывам покупателей Игорь Игоревич оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят вовремя из магазина А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят вовремя из магазина Б, равна 0,85. Игорь Игоревич заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар вовремя.

Ответ:____________________.

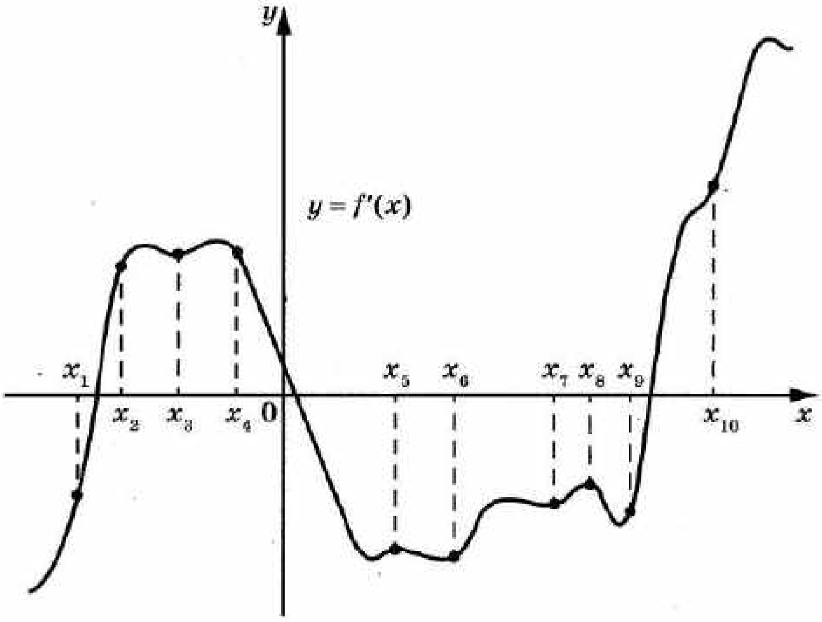
5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2,5}=\frac{1}{8}$.

Ответ:____________________.

6 Найдите значение выражения $4\cos 4\alpha$, если $\sin 2\alpha = -0{,}4$.

Ответ:____________________.

✓ **7** На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены 10 точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}. Сколько из этих точек лежит на промежутках убывания функции $f(x)$?



Ответ:____________________.

✓ **8** Независимое агентство намерено ввести рейтинг R новостных изданий на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый отдельный показатель — целое число от -1 до 1.
Составители рейтинга считают, что информативность публикаций ценится вчетверо, а объективность — вдвое дороже, чем оперативность, то есть

$$R = \frac{4In + Op + 2Tr}{A}.$$

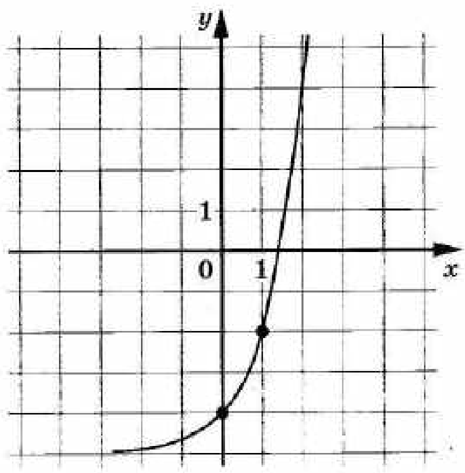
Найдите, каким должно быть число A, чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило рейтинг 1.

Ответ:____________________.

9 Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 63 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, большей скорости первого на 22 км/ч, в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:____________________.

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = a^x + b$. Найдите $f(4)$.



Ответ:___________________.

11 Найдите точку минимума функции $y = 11x - \ln(x+4)^{11} - 3$.

Ответ:___________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos 2x = \frac{\sin^2 x}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

13 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания AB равна $2\sqrt{3}$, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах A_1D_1 и DD_1 отмечены соответственно точки K и M так, что $A_1K = KD_1$, а $DM : MD_1 = 2 : 1$.

а) Докажите, что прямые MK и BK перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями BMK и BCC_1.

14 Решите неравенство $\frac{6\cdot 5^x - 11}{25^{x+0,5} - 6\cdot 5^x + 1} \geq 0,25$.

15 Анна хочет купить пакет акций быстрорастущей компании. В начале года этот пакет стоил 100 000 рублей. В середине каждого месяца, начиная с января, Анна откладывает на покупку пакета акций одну и ту же сумму. В конце каждого месяца пакет акций дорожает, но не более чем на 30 %. Какую наименьшую сумму нужно откладывать Анне каждый месяц, чтобы через некоторое время накопленных денег хватило на покупку желаемого пакета акций?

16 На сторонах AC, AB и BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C вне треугольника ABC построены равнобедренные прямоугольные треугольники AKC, ALB и BMC с прямыми углами K, L и M соответственно.

а) Докажите, что LC — высота треугольника KLM.
б) Найдите площадь треугольника KLM, если $LC = 4$.

17 Найдите, при каких неотрицательных значениях a функция $f(x) = 3ax^4 - 8x^3 + 3x^2 - 7$ на отрезке $[-1; 1]$ имеет ровно одну точку минимума.

18 Для каждого натурального числа n обозначим через $n!$ произведение первых n натуральных чисел ($1! = 1$).

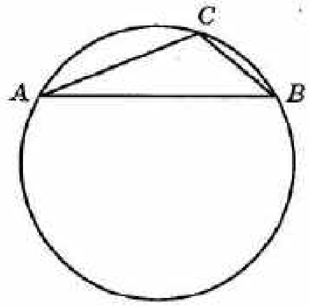
а) Существует ли такое натуральное число n, что десятичная запись числа $n!$ оканчивается ровно 9 нулями?
б) Существует ли такое натуральное число n, что десятичная запись числа $n!$ оканчивается ровно 23 нулями?
в) Сколько существует натуральных чисел n, меньших 100, для каждого из которых десятичная запись числа $n! \cdot (100 - n)!$ оканчивается ровно 23 нулями?

ВАРИАНТ 28

Часть 1

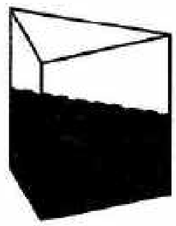
Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $2\sqrt{3}$. Найдите AB, если угол ACB равен 120°.



Ответ:________________.

2 В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 1100 см^3 воды и полностью в неё погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 25 см до отметки 29 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3.



Ответ:________________.

✓ **3** В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно один раз.

Ответ:________________.

✓ **4** По отзывам покупателей Пётр Петрович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят вовремя из магазина А, равна 0,92. Вероятность того, что этот товар доставят вовремя из магазина Б, равна 0,85. Пётр Петрович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар вовремя.

Ответ:________________.

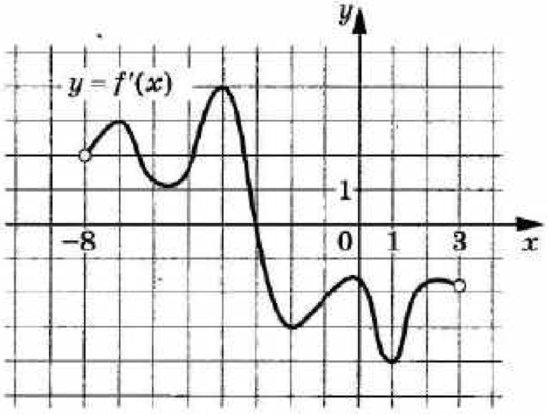
5 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x+5}=0{,}04$.

Ответ:________________.

6 Найдите значение выражения $2\sqrt{6}\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{7\pi}{6}\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

Ответ:________________.

7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 3)$. В какой точке отрезка $[-5; 0]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Ответ:____________________.

8 Независимое агентство намерено ввести рейтинг R новостных изданий на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций, а также качества Q сайта. Каждый отдельный показатель — целое число от 0 до 4. Составители рейтинга считают, что информативность публикаций ценится вдвое, а объективность — втрое дороже, чем оперативность и качество сайта, то есть

$$R = \frac{2In + Op + 3Tr + Q}{A}.$$

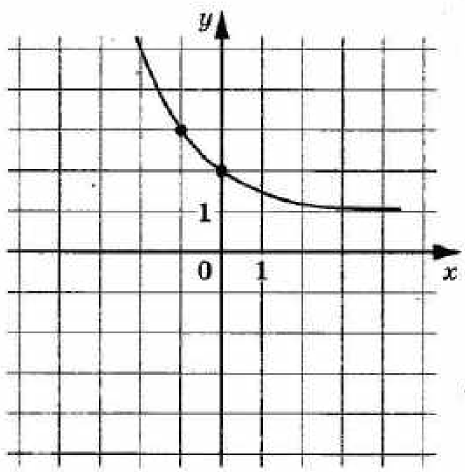
Найдите, каким должно быть число A, чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило рейтинг 1.

Ответ:____________________.

9 Дорога между пунктами A и B состоит из подъёма и спуска, а её длина равна 36 км. Путь из A в B занял у туриста 10 часов, из которых 2 часа ушло на спуск. Найдите скорость туриста на спуске, если она больше скорости на подъёме на 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:____________________.

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = a^x + b$. Найдите, при каком значении x значение функции равно 33.



Ответ:____________________.

✓ **11** Найдите наибольшее значение функции $y=7\ln(x+5)-7x+10$ на отрезке $[-4{,}5;\ 0]$.

Ответ:__________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $\cos 2x-\sin 2x=\cos x+\sin x+1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

13 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{3}$. На рёбрах C_1D_1 и DD_1 отмечены соответственно точки K и M так, что $D_1K=KC_1$, а $DM:MD_1=1:3$.

а) Докажите, что прямые MK и BK перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями BMK и ABB_1.

14 Решите неравенство $\lg^4(x^2-4)^2-\lg^2(x^2-4)^4\geq 192$.

15 Сергей хочет купить пакет акций быстрорастущей компании. В начале года этот пакет стоил 160 000 рублей. В середине каждого месяца, начиная с января, Сергей откладывает на покупку пакета акций одну и ту же сумму. В конце каждого месяца пакет акций дорожает, но не более чем на 25 %. Какую наименьшую сумму нужно откладывать Сергею каждый месяц, чтобы через некоторое время накопленных денег хватило на покупку желаемого пакета акций?

16 На сторонах AC, AB и BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C вне треугольника ABC построены равнобедренные прямоугольные треугольники AKC, ALB и BMC с прямыми углами K, L и M соответственно.

а) Докажите, что LC — высота треугольника KLM.

б) Найдите площадь треугольника KLM, если $LC=6$.

17 Найдите, при каких неположительных значениях a функция $f(x)=ax^4+4x^3-3x^2-5$ на отрезке $[-2;\ 2]$ имеет две точки максимума.

18 Для каждого натурального числа n обозначим через $n!$ произведение первых n натуральных чисел ($1!=1$).

а) Существует ли такое натуральное число n, что десятичная запись числа $n!$ оканчивается ровно 10 нулями?

б) Существует ли такое натуральное число n, что десятичная запись числа $n!$ оканчивается ровно 17 нулями?

в) Сколько существует натуральных чисел n, меньших 75, для каждого из которых десятичная запись числа $n!\cdot(75-n)!$ оканчивается ровно 17 нулями?

ВАРИАНТ 29

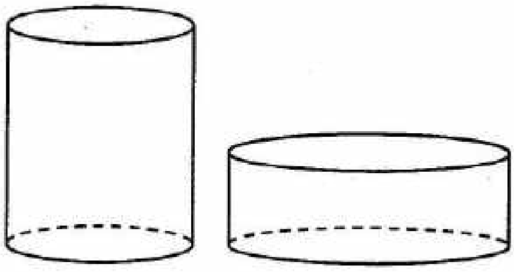
Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катет и гипотенуза равны соответственно 15 и 17.

Ответ:____________________.

2 Дано два цилиндра. Объём первого цилиндра равен 5. У второго цилиндра высота в 2,5 раза меньше, а радиус основания в 3 раза больше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра.



Ответ:____________________.

✓ **3** В чемпионате по гимнастике участвуют 50 спортсменок: 22 из США, 16 из Мексики, остальные из Канады. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Канады.

Ответ:____________________.

4 За круглый стол на 11 стульев в случайном порядке рассаживаются 9 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что между двумя девочками будет сидеть один мальчик.

Ответ:____________________.

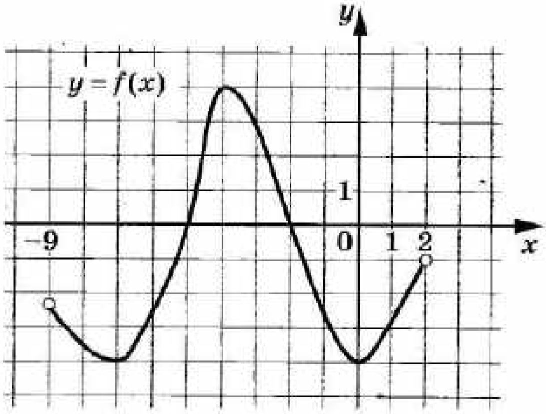
✓ **5** Найдите корень уравнения $(2x-11)^2=(2x-1)^2$.

Ответ:____________________.

6 Найдите значение выражения $\frac{8^{2,8}\cdot 16^{2,4}}{32^{3,2}}$.

Ответ:____________________.

✓ **7** На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 2)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.



Ответ: __________________.

8 Водолазный колокол, содержащий $\nu = 5$ моль воздуха объёмом $V_1 = 26$ л, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объёма V_2 (в л). Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, вычисляется по формуле $A = \alpha\nu T\log_2\frac{V_1}{V_2}$, где $\alpha = 8{,}5\,\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха. Найдите, какой объём V_2 будет занимать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 25 500 Дж. Ответ дайте в литрах.

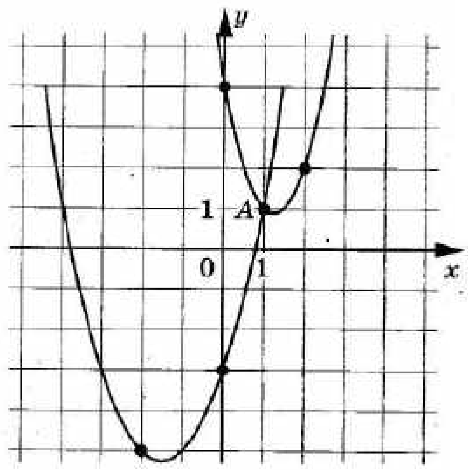
Ответ: __________________.

9 Смешали 2 кг воды с 3 кг 32-процентного раствора и некоторым количеством 42-процентного раствора одного и того же вещества. Сколько килограммов 42-процентного раствора использовали, если в результате получили 32-процентный раствор вещества?

Ответ: __________________.

10 На рисунке изображены графики функций $f(x) = 2x^2 - 5x + 4$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите ординату точки B.

Ответ: __________________.



11 Найдите наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x} - 6x + 11$ на отрезке $[0; 30]$.

Ответ:__________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $\cos 3x \sin 3x = \cos\frac{\pi}{3}\cos\left(12x + \frac{3\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right]$.

13 В правильной восьмиугольной призме $ABCDEFGHA_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ сторона основания AB равна $3\sqrt{2}$, а боковое ребро AA_1 равно 6. На ребре CC_1 отмечена точка M так, что $CM : MC_1 = 1 : 2$. Плоскость α параллельна прямой H_1E_1 и проходит через точки M и A.

а) Докажите, что сечение призмы $ABCDEFGHA_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ плоскостью α — равнобедренная трапеция.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка F_1, а основанием — сечение призмы $ABCDEFGHA_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ плоскостью α.

14 Решите неравенство $9 \cdot 2^{\log_3(5-x)} + 2^{1+\log_3 x} - 2^{\log_3(5x-x^2)} \leq 18$.

15 Цена ценной бумаги на конец года вычисляется по формуле $S = 1{,}1S_0 + 2000$, где S_0 — цена этой ценной бумаги на начало года в рублях. Максим может приобрести ценную бумагу, а может положить деньги на банковский счёт, на котором сумма увеличивается за год на 12 %. В начале любого года Максим может продать бумагу и положить все вырученные деньги на банковский счёт, а также снять деньги с банковского счёта и купить ценную бумагу. В начале 2021 года у Максима было 80 тыс. рублей, которые он может положить на банковский счёт или может приобрести на них ценную бумагу. Какая наибольшая сумма может быть у Максима через четыре года? Ответ дайте в рублях.

16 Отрезок, соединяющий середины M и N оснований соответственно BC и AD трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 4, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 14. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB, основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_7(36-y^2)=\log_7(36-a^2x^2), \\ x^2+y^2=2x+6y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

18 Для набора 30 различных натуральных чисел выполнено, что сумма любых трёх чисел из этого набора меньше суммы любых четырёх чисел из этого набора.

а) Может ли одним из этих чисел быть число 999?

б) Может ли одним из этих чисел быть число 66?

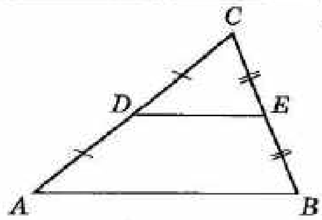
в) Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел этого набора?

ВАРИАНТ 30

Часть 1

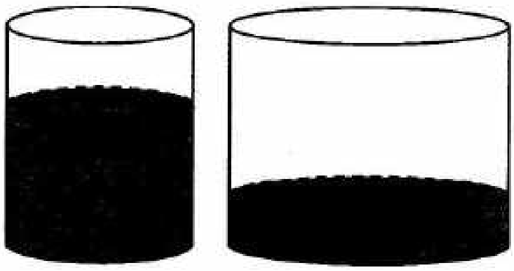
Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В треугольнике ABC средняя линия DE параллельна стороне AB. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь трапеции $ABED$ равна 48.



Ответ:___________________.

2 В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 25 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2,5 раза больше диаметра первого? Ответ дайте в сантиметрах.



Ответ:___________________.

3 В соревнованиях по толканию ядра участвуют спортсмены из четырёх стран: 5 из Японии, 4 из Кореи, 9 из Китая и 7 из Индии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий первым, окажется из Индии.

Ответ:___________________.

4 За круглый стол на 6 стульев в случайном порядке рассаживаются 4 мальчика и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки **не будут** сидеть рядом.

Ответ:___________________.

5 Найдите корень уравнения $(x-11)^4=(x+3)^4$.

Ответ:___________________.

6 Найдите значение выражения $\dfrac{(\sqrt{20}+\sqrt{12})^2}{4+\sqrt{15}}$.

Ответ:___________________.

7 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{2}t^3-2t^2+6t+25$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t=4$.

Ответ:____________________.

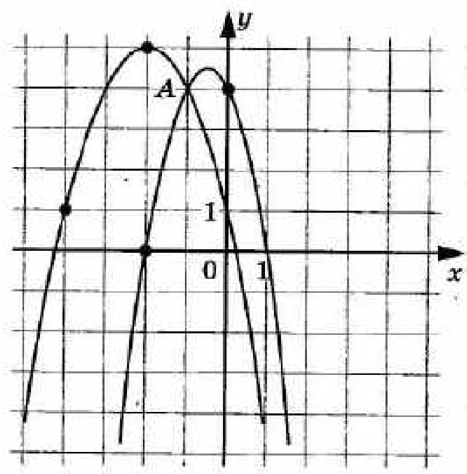
8 Водолазный колокол, содержащий $\nu=2$ моль воздуха при давлении $p_1=2{,}4$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2 в атмосферах. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, вычисляется по формуле $A=\alpha\nu T\log_2\frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha=13{,}5\,\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ — постоянная, $T=300$ К — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 16 200 Дж. Ответ дайте в атмосферах.

Ответ:____________________.

9 Первая труба заполняет резервуар объёмом 440 литров на 4 минуты медленнее, чем вторая труба заполняет резервуар объёмом 396 литров. Первая труба пропускает на 2 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба?

Ответ:____________________.

10 На рисунке изображены графики функций $f(x)=-2x^2-2x+4$ и $g(x)=ax^2+bx+c$, которые пересекаются в точках $A(-1;\,4)$ и $B(x_0;\,y_0)$. Найдите x_0.



Ответ:____________________.

11 Найдите точку минимума функции $y=(x+8)^2\cdot e^{-x-3}$.

Ответ:__________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $\cos 2x \sin 2x \sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{4}\cos\left(8x-\frac{3\pi}{2}\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{8\pi}{3};\frac{10\pi}{3}\right]$.

13 Радиус основания конуса равен 12, а высота конуса равна 5.

а) Постройте сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса и взаимно перпендикулярные образующие.
б) Найдите расстояние от плоскости сечения до центра основания конуса.

14 Решите неравенство $30\cdot 3^{\log 2(7-x)}+3^{1+\log 2x}-3^{\log 2\left(7x-x^2\right)}\geq 90$.

15 Бригаду из 30 рабочих нужно распределить по двум объектам. Если на первом объекте работает p человек, то каждый из них получает в сутки $200p$ рублей. Если на втором объекте работает p человек, то каждый из них получает в сутки $(50p+300)$ рублей. Как нужно распределить рабочих по объектам, чтобы их суммарная суточная зарплата оказалась наименьшей? Сколько рублей в этом случае придётся заплатить за сутки всем рабочим?

16 На сторонах AC, AB и BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C во внешнюю сторону построены равнобедренные прямоугольные треугольники AKC, ALB и BMC с прямыми углами K, L и M соответственно.

а) Докажите, что LC — высота треугольника KLM.
б) Найдите площадь треугольника KLM, если $LC=10$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_{11}\left(a-y^2\right)=\log_{11}\left(a-x^2\right), \\ x^2+y^2=2x+6y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

18 Для набора 40 различных натуральных чисел выполнено, что сумма любых двух чисел из этого набора меньше суммы любых четырёх чисел из этого набора.

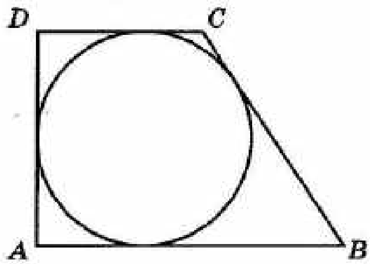
а) Может ли одним из этих чисел быть число 777?
б) Может ли одним из этих чисел быть число 33?
в) Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел этого набора?

ВАРИАНТ 31

Часть 1

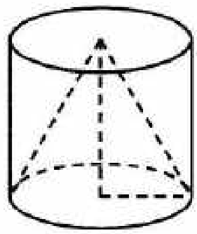
Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

✓ **1** Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 100, её большая боковая сторона равна 37. Найдите радиус окружности.



Ответ:__________________.

✓ **2** Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём цилиндра равен 162. Найдите объём конуса.



Ответ:__________________.

3 Фабрика выпускает сумки. В среднем 2 сумки из 120 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов. Результат округлите до сотых.

Ответ:__________________.

4 В ящике четыре красных и два синих фломастера. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер достанут третьим по счёту?

Ответ:__________________.

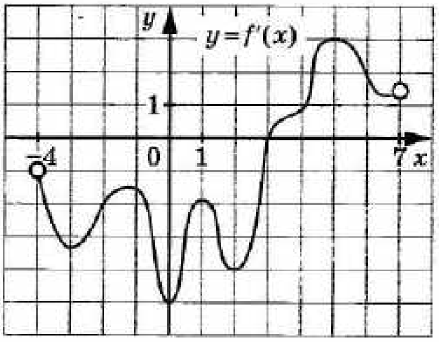
5 Найдите корень уравнения $0{,}5^{4-5x}=64$.

Ответ:__________________.

✓ **6** Найдите значение выражения $(\sqrt{3}-\sqrt{13})(\sqrt{3}+\sqrt{13})$.

Ответ:__________________.

7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 7)$. В какой точке отрезка $[-2; 2]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Ответ: ____________________.

8 Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega = 60°/\text{мин}$ — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 6°/\text{мин}^2$ — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет $3375°$. Определите время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу. Ответ выразите в минутах.

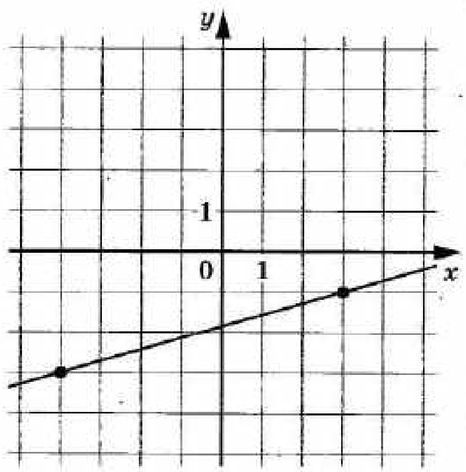
Ответ: ____________________.

9 Первая труба наполняет резервуар на 54 минуты дольше, чем вторая. Обе трубы наполняют этот же резервуар за 36 минут. За сколько минут наполняет этот резервуар одна вторая труба?

Ответ: ____________________.

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите $f(-18)$.

Ответ: ____________________.



11 Найдите точку минимума функции $y = x^2 - 28x + 96\ln x - 5$.

Ответ: ________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$.

13 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK : KB = SM : MC = 1 : 5$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой BC.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA.

б) Найдите угол между плоскостями α и SBC.

14 Решите неравенство $\log_{0,5}(12-6x) \geq \log_{0,5}\left(x^2-6x+8\right)+\log_{0,5}(x+3)$.

15 15 января планируется взять кредит в банке на некоторый срок (целое число месяцев). Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20 % больше суммы, взятой в кредит? (Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся.)

16 Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая BO вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P.

а) Докажите, что $\angle POA = \angle PAO$.

б) Найдите площадь треугольника APO, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 6, $\angle BAC = 75°$, $\angle ABC = 60°$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$$

имеет ровно два различных корня.

18 В ящике лежит 76 фруктов, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два фрукта различной массы, а средняя масса всех фруктов равна 100 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых меньше 100 г, равна 85 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых больше 100 г, равна 124 г.

а) Могло ли в ящике оказаться поровну фруктов массой меньше 100 г и фруктов массой больше 100 г?

б) Могло ли в ящике оказаться меньше 8 фруктов, масса каждого из которых равна 100 г?

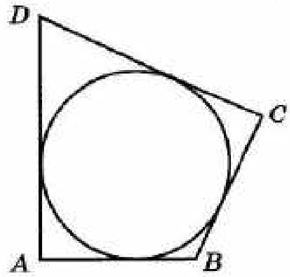
в) Какую наибольшую массу может иметь фрукт в этом ящике?

ВАРИАНТ 32

Часть 1

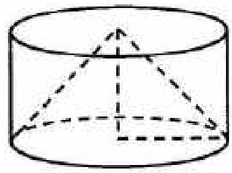
Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB=8$, $BC=5$ и $CD=27$. Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.



Ответ: ________________.

2 Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $27\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.



Ответ: ________________.

3 При производстве в среднем на каждые 1500 насосов приходится 36 неисправных. Найдите вероятность того, что случайно выбранный насос окажется неисправным.

Ответ: ________________.

4 В ящике три красных и три синих фломастера. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер достанут третьим по счёту?

Ответ: ________________.

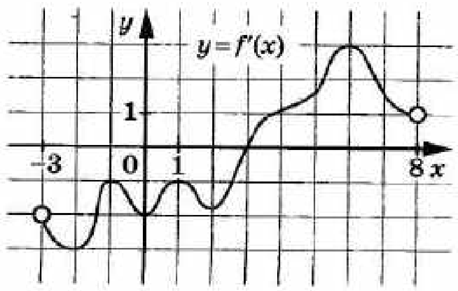
5 Найдите корень уравнения $0{,}2^{5+4x}=125$.

Ответ: ________________.

6 Найдите значение выражения $\left(3\frac{1}{8}-1{,}5\right):\frac{1}{56}$.

Ответ: ________________.

✓ **7** На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. В какой точке отрезка $[-2; 3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Ответ:____________________.

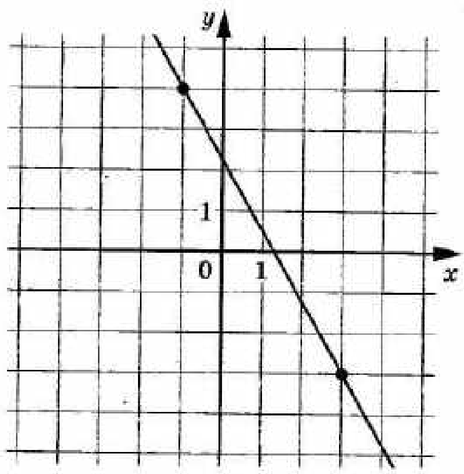
8 В телевизоре ёмкость высоковольтного конденсатора $C = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 6 \cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 34$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1{,}7$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошла 51 с. Ответ дайте в киловольтах.

Ответ:____________________.

9 Плиточник должен уложить 120 м^2 плитки. Если он будет укладывать на 8 м^2 в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 4 дня раньше. Сколько квадратных метров плитки в день планирует укладывать плиточник?

Ответ:____________________.

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение x, при котором $f(x) = -20{,}5$.



Ответ:____________________.

11 Найдите точку максимума функции $y = x^3 + 18x^2 + 81x + 23$.

Ответ:____________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $2\sin^2 x - 3\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - 5 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

13 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 5. На ребре SC отмечена точка K, причём $SK : KC = 1 : 3$. Плоскость α содержит точку K и параллельна плоскости SAD.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α — трапеция.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка S, а основанием — сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α.

14 Решите неравенство $\log_2(18-9x) - \log_2(x+2) > \log_2(x^2-6x+8)$.

15 15 января планируется взять кредит в банке на 49 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 2 млн рублей?

(Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся.)

16 Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая BO вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке E.

а) Докажите, что $\angle EOC = \angle ECO$.

б) Найдите площадь треугольника ACE, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен $6\sqrt{3}$, $\angle ABC = 60°$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{|x-6|+a-6}{x^2-10x+a^2}=0$$

имеет ровно два различных корня.

18 В ящике лежит 58 овощей, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два овоща различной массы, а средняя масса всех овощей равна 1000 г. Средняя масса овощей, масса каждого из которых меньше 1000 г, равна 976 г. Средняя масса овощей, масса каждого из которых больше 1000 г, равна 1036 г.

а) Могло ли в ящике оказаться поровну овощей массой меньше 1000 г и овощей массой больше 1000 г?

б) Могло ли в ящике оказаться ровно 12 овощей, масса каждого из которых равна 1000 г?

в) Какую наименьшую массу может иметь овощ в этом ящике?

ВАРИАНТ 33

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

✓ **1** Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 145. Найдите площадь параллелограмма $A'B'C'D'$, вершинами которого являются середины сторон данного параллелограмма.

Ответ:__________________.

✓ **2** Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём шара равен 188. Найдите объём конуса.

Ответ:__________________.

✓ **3** Научная конференция проводится в 3 дня. Всего запланировано 50 докладов: в первый день 22 доклада, остальные распределены поровну между вторым и третьим днями. На конференции планируется доклад профессора М. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

Ответ:__________________.

4 Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,05. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,05. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Ответ:__________________.

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{11-5x}=1-x$.

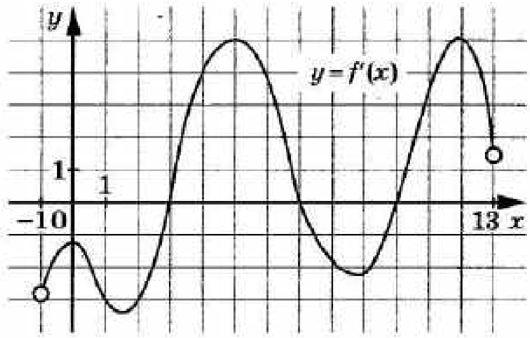
Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите наибольший из корней.

Ответ:__________________.

✓ **6** Найдите $\log_a\left(ab^8\right)$, если $\log_a b=8$.

Ответ:__________________.

7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-1; 13)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = x + 18$ или совпадает с ней.



Ответ:____________________.

8 Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 292$ Гц. Чуть позже гудок издал подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону $f(v) = \dfrac{f_0}{1 - \dfrac{v}{c}}$ (Гц), где c — скорость звука (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 8 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 300$ м/с. Ответ выразите в м/с.

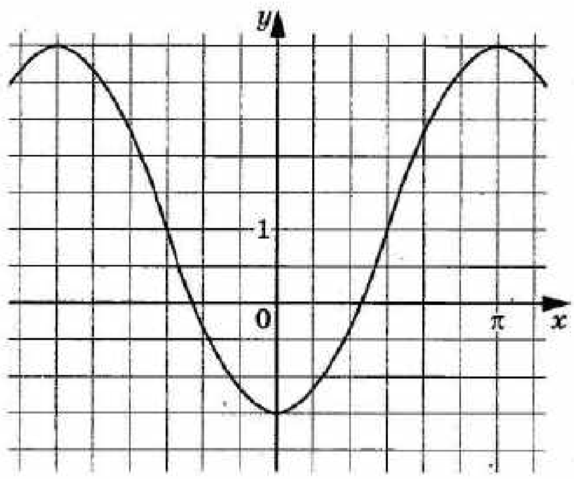
Ответ:____________________.

9 Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 16 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 10 км/ч больше скорости другого?

Ответ:____________________.

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = a\cos x + b$. Найдите a.

Ответ:____________________.



✓ **11** Найдите наибольшее значение функции $y=(x^2+22x-22)e^{2-x}$ на отрезке [0; 5].

Ответ:__________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $\log_{\frac{1}{2}}(3\cos 2x-2\cos^2 x+5)=-2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$.

13 В правильной треугольной усечённой пирамиде $ABCA_1B_1C_1$ площадь нижнего основания ABC в четыре раза больше площади меньшего основания $A_1B_1C_1$. Через ребро AC проведена плоскость α, которая пересекает ребро BB_1 в точке K и делит пирамиду на два многогранника равного объёма.

а) Докажите, что точка K делит ребро BB_1 в отношении $7:1$, считая от точки B.

б) Найдите площадь сечения усечённой пирамиды плоскостью α, если высота пирамиды равна $2\sqrt{2}$, а ребро меньшего основания равно $2\sqrt{6}$.

14 Решите неравенство $25^{2x^2-0,5}-0,6\cdot 4^{2x^2+0,5}\le 10^{2x^2}$.

15 В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 1,587 млн рублей.

Сколько миллионов рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

16 Окружность проходит через вершины A, B и D параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону BC в точках B и M, а также пересекает продолжение стороны CD за точку D в точке N.

а) Докажите, что $AM = AN$.

б) Найдите отношение $CD : DN$, если $AB : BC = 1 : 3$, а $\cos\angle BAD = 0{,}4$.

17 Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\left(\sqrt{12-x^2}-y\right)\left((x+4)^2+(y+4)^2-8(x+4)+x^2-y^2-24\right)}{2-x^2}=0, \\ y=1-2a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

18 В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере 2 учащихся, а суммарно тест писал 51 учащийся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе № 1 вырасти в 2 раза?

б) Средний балл в школе № 1 вырос на 10 %, средний балл в школе № 2 также вырос на 10 %. Мог ли первоначальный средний балл в школе № 2 равняться 1?

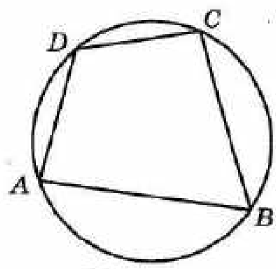
в) Средний балл в школе № 1 вырос на 10 %, средний балл в школе № 2 также вырос на 10 %. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.

ВАРИАНТ 34

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

✓ **1** Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны $112°$ и $125°$. Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.



Ответ:____________________.

✓ **2** Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём конуса равен 19. Найдите объём шара.

Ответ:____________________.

✓ **3** Конкурс исполнителей проводится в 4 дня. Всего заявлено 50 выступлений: по одному от каждой страны, участвующей в конкурсе. Исполнитель из России участвует в конкурсе. В первый день запланировано 26 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление исполнителя из России состоится в третий день конкурса?

Ответ:____________________.

4 Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,04. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,98. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,03. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Ответ:____________________.

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{2x-3}=x-3$.

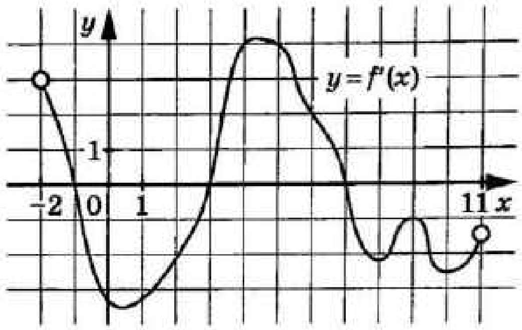
Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите наименьший из корней.

Ответ:____________________.

6 Найдите $\log_a\left(a^4b^3\right)$, если $\log_a b = 4$.

Ответ:____________________.

7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2;\ 11)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 5$ или совпадает с ней.



Ответ:____________________.

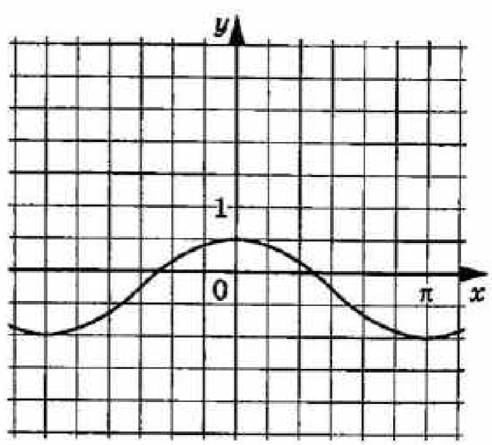
8 При сближении источника и приёмника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 130$ Гц и определяется следующим выражением: $f = f_0\dfrac{c+u}{c-v}$ (Гц), где c — скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u = 15$ м/с и $v = 9$ м/с — скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет не менее 135 Гц?

Ответ:____________________.

9 Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 25 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 114 км/ч, и через 30 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:____________________.

10 На рисунке изображён график функции $f(x) = a\cos x + b$. Найдите b.



Ответ:____________________.

✓ **11** Найдите наименьшее значение функции $y=(1-x)e^{2-x}$ на отрезке [0,5; 5].

Ответ:____________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $\log_{\frac{1}{3}}\left(2\sin^2 x-3\cos 2x+6\right)=-2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$.

13 В правильной треугольной усечённой пирамиде $ABCA_1B_1C_1$ площадь нижнего основания ABC в девять раз больше площади меньшего основания $A_1B_1C_1$. Через ребро AB проведена плоскость α, которая пересекает ребро CC_1 в точке N и делит пирамиду на два многогранника равного объёма.

а) Докажите, что точка N делит ребро CC_1 в отношении 5 : 13, считая от точки C_1.

б) Найдите площадь сечения усечённой пирамиды плоскостью α, если высота пирамиды равна 13, а ребро меньшего основания равно 3.

14 Решите неравенство $3\cdot 25^{x+0,5}+4^{2x+1,5}\le 22\cdot 20^{x}$.

15 В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 16 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 2,523 млн рублей.

Сколько миллионов рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

16 Окружность проходит через вершины A, B и D параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону BC в точках B и M, а также пересекает продолжение стороны CD за точку D в точке N.

а) Докажите, что $AM = AN$.

б) Найдите отношение $CD : DN$, если $AB : BC = 2 : 3$, а $\cos\angle BAD = 0{,}7$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\left(y-\sqrt{10-x^2}\right)\left((x+5)^2+(y+5)^2-10(x+7{,}5)+x^2-y^2+5\right)}{\sqrt{x^2-1}}=0, \\ y=ax+a-1 \end{cases}$$

имеет одно решение.

18 В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере 2 учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе № 1 уменьшиться в 10 раз?

б) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10 %, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10 %. Мог ли первоначальный средний балл в школе № 2 равняться 7?

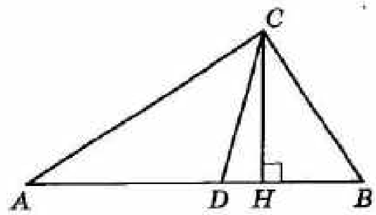
в) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10 %, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10 %. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.

ВАРИАНТ 35

Часть 1

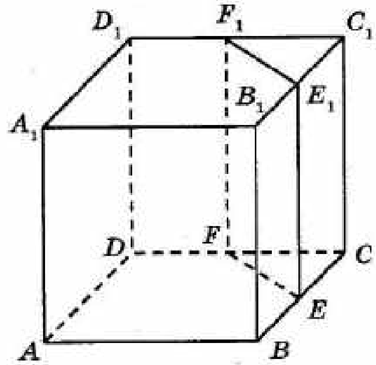
Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

✓ **1** Один из углов прямоугольного треугольника равен 66°. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



Ответ:__________________.

✓ **2** Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 25. Найдите объём куба.



Ответ:__________________.

✓ **3** В сборнике билетов по физике всего 25 билетов, в 11 из них встречается вопрос по теме «Конденсаторы». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику **не достанется** вопрос по теме «Конденсаторы».

Ответ:__________________.

4 Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов. Известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,5. Найдите отношение вероятностей событий «стрелок поразит ровно пять мишеней» и «стрелок поразит ровно три мишени».

Ответ:__________________.

5 Найдите корень уравнения $\log_3(x+6)=\log_3(10-x)-1$.

Ответ:__________________.

6 Найдите значение выражения $\frac{(5\sqrt{3})^2}{10}$.

Ответ: __________________.

7 Прямая $y = 8x + 11$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 7x - 7$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: __________________.

8 Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле $R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K+1)^m}$, где $m = \frac{0{,}02K}{r_{\text{пок}} + 0{,}1}$, $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями, $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина, данная экспертами, K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина, если число покупателей, оценивших магазин, равно 15, их средняя оценка равна 0,3, а оценка экспертов равна 0,38.

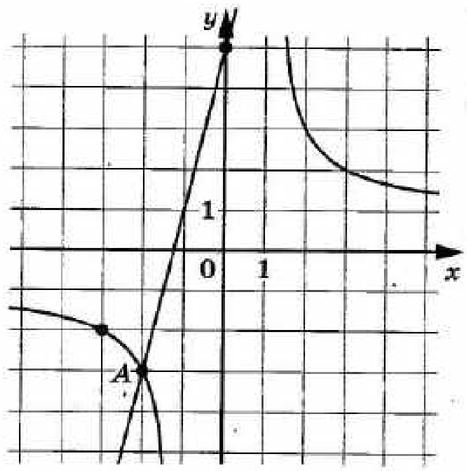
Ответ: __________________.

9 Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 30 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что в час автомобилист проезжает на 40 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт В на 1 час позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: __________________.

10 На рисунке изображены графики функций $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках $A(-2; -3)$ и $B(x_0; y_0)$. Найдите x_0.

Ответ: __________________.



11 Найдите точку минимума функции $y=\dfrac{162}{x}+2x+7$.

Ответ: ________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $2\cos^4 x+3\sin^2 x-2=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2}; -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

13 Основанием пирамиды $FABC$ является правильный треугольник ABC со стороной 36. Все боковые рёбра пирамиды равны 30. На рёбрах FB и FC отмечены соответственно точки K и N так, что $BK=CN=20$. Через точки K и N проведена плоскость α, перпендикулярная плоскости ABC.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану AM в отношении $2:7$.
б) Найдите расстояние от точки B до плоскости α.

14 Решите неравенство $\log^2_{0,2}(x-3)^8+8\log_5(x-3)^4\le 32$.

15 15 декабря планируется взять кредит в банке на сумму 600 тысяч рублей на $(n+1)$ месяц. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по n-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа n-го месяца долг составит 200 тысяч рублей;
- к 15-му числу $(n+1)$-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите n, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 852 тысячи рублей.

16 В треугольнике ABC известно, что $AC = 10$ и $AB = BC = 14$.

а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная стороне AC, пересекает окружность, вписанную в треугольник ABC.

б) Найдите отношение длин отрезков, на которые окружность делит среднюю линию, параллельную стороне AC.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$(4|x|-a-3)\left(x^2-2x-2-a\right)\leq 0$$

имеет хотя бы одно решение из промежутка $[-4;\ 4]$.

18 Группу детей можно перевезти автобусами модели А или автобусами модели Б. Известно, что в автобусе модели А количество мест больше 30, но меньше 40, а в автобусах модели Б — больше 40, но меньше 50. Если всех детей рассадить в автобусы модели А, то все места будут заняты. Если всех детей рассадить в автобусы модели Б, то все места также будут заняты, но потребуется на один автобус меньше.

а) Может ли потребоваться 5 автобусов модели А?

б) Найдите наименьшее возможное количество детей в группе, если известно, что их больше 150.

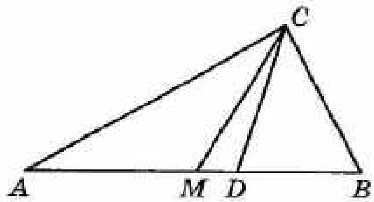
в) Найдите наибольшее возможное количество детей в группе.

ВАРИАНТ 36

Часть 1

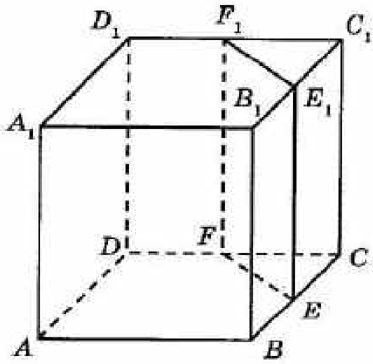
Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

✓ **1** Острые углы прямоугольного треугольника равны $80°$ и $10°$. Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



Ответ:__________________.

✓ **2** Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 11. Найдите объём куба.



Ответ:__________________.

✓ **3** В сборнике билетов по философии всего 50 билетов, в 6 из них встречается вопрос по теме «Кант». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме «Кант».

Ответ:__________________.

4 Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов. Известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,8. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно четыре мишени» больше вероятности события «стрелок поразит ровно три мишени»?

Ответ:__________________.

5 Найдите корень уравнения $\log_5(x+7)=\log_5(5-x)-1$.

Ответ:__________________.

✓ **6** Найдите значение выражения $\frac{20}{(2\sqrt{2})^2}$.

Ответ:__________________.

7 Прямая $y = 6x + 7$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 5x + 6$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ:__________________.

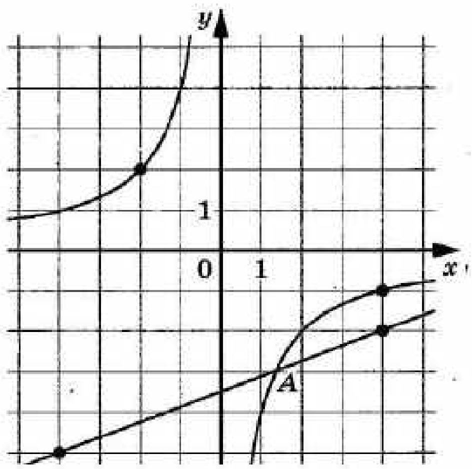
8 При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = 7{,}776 \cdot 10^6$ Па $\cdot$ м^4, где p — давление в газе в паскалях, V — объём газа в кубических метрах, $k = \frac{4}{3}$. Найдите, какой объём V (в куб. м) будет занимать газ при давлении p, равном $3{,}75 \cdot 10^6$ Па.

Ответ:__________________.

9 Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 16 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 2 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в исходный пункт теплоход возвращается через 53 часа после отплытия из него. Сколько километров прошёл теплоход за весь рейс?

Ответ:__________________.

10 На рисунке изображены графики функций $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите ординату точки B.



Ответ:__________________.

11 Найдите точку минимума функции $y=-\frac{x}{x^2+900}$.

Ответ:____________________.

Часть 2

12 а) Решите уравнение $4\sin^4 x+7\cos^2 x-4=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5\pi; -4\pi]$.

13 Основанием пирамиды $FABC$ является правильный треугольник ABC со стороной 48. Все боковые рёбра пирамиды равны 40. На рёбрах FB и FC отмечены соответственно точки K и N так, что $FK=FN=10$. Через точки K и N проведена плоскость α, перпендикулярная плоскости ABC.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану AM в отношении $1:3$.
б) Найдите расстояние от точки C до плоскости α.

14 Решите неравенство $3\log_4^2(4-x)^8+4\log_{0,5}(4-x)^6\geq 72$.

15 15 декабря планируется взять кредит в банке на сумму 1 000 000 рублей на $(n+1)$ месяцев. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по n-й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа n-го месяца долг составит 200 тысяч рублей;
- к 15-му числу $(n+1)$-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1378 тысяч рублей.

16 В треугольнике ABC известно, что $AC = 26$ и $AB = BC = 38$.

а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная стороне AC, пересекает окружность, вписанную в треугольник ABC.

б) Найдите отношение длин отрезков, на которые окружность делит среднюю линию, параллельную стороне AC.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых любое значение из промежутка $[-1{,}5;\ -0{,}5]$ является решением неравенства

$$(4|x|-a-3)\left(x^2-2x-2-a\right)\geq 0.$$

18 Группу детей можно перевезти автобусами модели А или автобусами модели Б. Известно, что в автобусе модели А количество мест больше 40, но меньше 50, а в автобусах модели Б — больше 50, но меньше 60. Если всех детей рассадить в автобусы модели А, то все места будут заняты. Если всех детей рассадить в автобусы модели Б, то все места также будут заняты, но потребуется на один автобус меньше.

а) Может ли потребоваться 4 автобуса модели Б?

б) Найдите наибольшее возможное количество детей в группе, если известно, что их меньше 300.

в) Найдите наибольшее возможное количество автобусов модели А.

ОТВЕТЫ

Каждое из заданий 1–11 считается выполненным верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Верный ответ на каждое задание оценивается 1 баллом.

Вариант 1

№ задания	Ответ
1	5,5
2	2048
3	0,06
4	0,89
5	−0,2
6	0,5
7	5
8	5,832
9	2
10	−4
11	−2910
12	а) $\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$ $-\frac{2\pi}{3}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z};$ б) $\frac{8\pi}{3};\ 3\pi;\ \frac{10\pi}{3}$
13	б) 24
14	$(-\infty;\ 1]\cup[\log_4 28;\ 2,5)$
15	400 тыс. рублей
16	б) 14,2
17	$(-4;\ -3)\cup(-3;\ -1)\cup(-1;\ 0)$
18	а) да; б) нет; в) 205

Вариант 2

№ задания	Ответ
1	7,5
2	4
3	0,12
4	0,91
5	−0,9
6	0,2
7	1
8	0,216
9	16
10	−8
11	12,25
12	а) $\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ \frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$ $\frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z};$ б) $-\frac{19\pi}{6};\ -3\pi$
13	б) 26
14	$(-\infty;\ \log_5 10)\cup[2;\ +\infty)$
15	210 тыс. рублей
16	б) 29,7
17	$(0;\ 0,8)\cup(0,8;\ 3,2)\cup(3,2;\ 4)$
18	а) да; б) нет; в) 195

Вариант 3

№ задания	Ответ
1	2,5
2	30
3	0,37
4	0,375
5	−2,5
6	4
7	2
8	51,2
9	14
10	32
11	204
12	а) 2,25; $\log_4^2 24$; б) 2,25; $\log_4^2 24$;
13	б) 180
14	$(-\sqrt{8}; -\sqrt{6}]\cup[\sqrt{6}; \sqrt{8})$
15	7,28 млн рублей
16	б) 32
17	$\left\{-\frac{7}{13}\right\}\cup\left[\frac{5}{6}; \frac{22}{5}\right)$
18	а) да; б) да; в) 2295

Вариант 4

№ задания	Ответ
1	1,5
2	12
3	0,24
4	0,125
5	0,375
6	125
7	8
8	281,25
9	18
10	−56
11	−10,9
12	а) $\log_5^2 10$; $\log_5^2 15$; б) $\log_5^2 10$
13	б) 40
14	$(-\sqrt{3}; -1{,}5]\cup[1{,}5; \sqrt{3})$
15	8 937 тыс. рублей
16	42,16
17	$(-\infty; -7]\cup[2; +\infty)\cup\left\{-\frac{11}{8}\right\}$
18	а) да; б) нет; в) 897

Вариант 5

№ задания	Ответ
1	99,5
2	12
3	0,004 <или> −0,004
4	0,9409
5	−0,5
6	2
7	−19
8	60
9	17
10	16
11	−52
12	а) $\frac{\pi}{5}n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{5};\ \frac{14\pi}{5};\ 3\pi;\ \frac{16\pi}{5};\ \frac{17\pi}{5}$
13	б) $(2\sqrt{3}-3{,}25)\pi$
14	$(1{,}5;\ \log_2 3)\cup\left[1\frac{5}{6};\ 4{,}5\right]$
15	8,4 млн рублей
16	б) 9,1
17	$\{1\}\cup\left(\frac{4}{3};\ 3\right)$
18	а) нет; б) нет; в) 36

Вариант 6

№ задания	Ответ
1	55
2	18
3	0,006 <или> −0,006
4	0,8464
5	−5,5
6	3
7	−4
8	30
9	24
10	−1
11	−6
12	а) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{7\pi}{6};\ -\frac{5\pi}{6}$
13	б) $\frac{7\sqrt{3}-\sqrt{39}}{6}$
14	$(-1{,}5;\ -1{,}25)\cup(2{,}5;\ \log_3 16]$
15	5,65 млн рублей
16	б) $\frac{25\sqrt{1073}}{7}$
17	$\left(-\frac{7}{3};\ -2\right)$
18	а) нет; б) нет; в) 57, 58, 59, 60, 61

Вариант 7

№ задания	Ответ
1	0,2
2	10
3	0,2
4	0,56
5	−0,4
6	−1
7	9
8	0,6
9	55
10	6
11	0,5
12	а) 0,25; $\sqrt[4]{8}$; б) 0,25
13	б) 3
14	$\{-4\}\cup(\log_4 12;\ +\infty)$
15	8 млн рублей
16	б) $6\sqrt{2}$
17	$\left[\sqrt{2};\ \dfrac{3\sqrt{6}}{\sqrt{13}}\right)$
18	а) да, б) нет, в) 79

Вариант 8

№ задания	Ответ
1	0,4
2	5
3	0,125
4	0,46
5	−7
6	−1
7	7
8	1,8
9	11
10	0,25
11	17
12	а) 0,5; $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{4}$; б) 0,5
13	б) $6\sqrt{3}$
14	$\{2\}\cup[\log_3 12;\ +\infty)$
15	13 млн рублей
16	б) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$
17	$\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{13}};\ \dfrac{4\sqrt{6}}{5}\right)$
18	а) да, б) нет, в) 73

Вариант 9

№ задания	Ответ
1	3
2	15 625
3	0,01
4	0,28
5	−12
6	144
7	−1
8	756
9	20
10	−3
11	9
12	а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbb{Z};\ \frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ \frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{4};\ \frac{15\pi}{4};\ \frac{25\pi}{6};\ \frac{17\pi}{4}$
13	б) $\operatorname{arctg}(\sqrt{6}+2\sqrt{3})$
14	$(-\infty;\ -1)$
15	7 млн рублей
16	б) $\frac{2\sqrt{69}}{3}$
17	$\{-5\}\cup\left[-\frac{50}{23};\ -\frac{45}{23}\right)\cup\left(\frac{11}{3};\ \frac{13}{3}\right)$
18	а) да; б) нет; в) 176

Вариант 10

№ задания	Ответ
1	0,6
2	150
3	0,28
4	0,17
5	−2,6
6	625
7	−18
8	220,5
9	9
10	253
11	−23,25
12	а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbb{Z};\ -\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ \frac{2\pi}{3}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{9\pi}{4};\ -\frac{7\pi}{4};\ -\frac{4\pi}{3};\ -\frac{5\pi}{4}$
13	б) $\operatorname{arctg}(2\sqrt{6}+2\sqrt{3})$
14	$(-\infty;\ -2)$
15	4 млн рублей
16	б) $\frac{5\sqrt{22}}{4}$
17	$\{4\}\cup\left[\frac{16}{3};\ \frac{50}{9}\right)\cup\left(\frac{58}{7};\ 9\right)$
18	а) нет; б) нет; в) 1933

Вариант 11

№ задания	Ответ
1	$-0{,}7$
2	72
3	0,25
4	0,043
5	$-0{,}2$
6	-5
7	-1
8	50
9	17,5
10	78
11	6,75
12	а) $\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ \frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$ $\frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z};$ $-\frac{\pi}{6}+2\pi p,\ p\in\mathbb{Z};\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi l,$ $l\in\mathbb{Z}.$ б) $-\frac{19\pi}{6};\ -3\pi;\ -\frac{17\pi}{6}$
13	б) $80\sqrt{3}$
14	$(-\infty;\ 0]\cup[2;\ 3]$
15	600 тыс. рублей
16	б) $\frac{8\sqrt{5}}{3}$
17	$\{-5\}\cup(-1;\ 0)$
18	а) да; б) нет; в) 97

Вариант 12

№ задания	Ответ
1	0,75
2	24
3	0,55
4	0,02
5	$-1{,}5$
6	-4
7	4
8	40
9	13,5
10	-23
11	6,25
12	а) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbb{Z};$ б) $\frac{9\pi}{2};\ \frac{19\pi}{4};\ \frac{21\pi}{4};\ \frac{11\pi}{2}$
13	б) 150
14	$(-\infty;\ 0)\cup(\log_5 3;\ 1)$
15	750 тыс. рублей
16	$\frac{25\sqrt{39}}{64}$
17	$(-\infty;-2)\cup\left(-2;-\frac{2}{3}\right]\cup(0;+\infty)$
18	а) да; б) нет; в) 85

Вариант 13

№ задания	Ответ
1	8
2	48
3	0,4
4	0,6
5	−9
6	0,5
7	4
8	33
9	9
10	−0,5
11	77
12	а) −2; −1; б) −1
13	б) $5\sqrt{3}$
14	(1; 3]
15	37
16	б) $\frac{120}{13}$
17	$[4\sqrt{3}; 12]$
18	а) да; б) нет; в) $\frac{23}{20}$

Вариант 14

№ задания	Ответ
1	14
2	40,5
3	0,28
4	0,78
5	−2
6	0,04
7	39
8	23
9	24
10	0,4
11	37
12	а) 1; $\log_{2,5}4$; б) 1; $\log_{2,5}4$
13	б) $1\frac{11}{13}$
14	[−3; −1)
15	3
16	б) 4
17	$(0; 0{,}4] \cup [2\sqrt[3]{5}; +\infty)$
18	а) да; б) нет; в) $11\frac{5}{6}$

Вариант 15

№ задания	Ответ
1	11,55
2	432
3	0,014
4	0,06
5	−9
6	0,25
7	2
8	0,32
9	3
10	2,5
11	208
12	а) πk, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) -3π; $-\frac{11\pi}{4}$; -2π
13	б) $\arccos\frac{2\sqrt{210}}{35}$
14	$(-1; 0)$
15	16
16	б) 6
17	$[1-1{,}5\sqrt[3]{4}; 0]$
18	а) да; б) нет; в) 26

Вариант 16

№ задания	Ответ
1	12
2	192
3	0,29
4	0,02
5	−8
6	0,125
7	4
8	1,16
9	1
10	−15
11	5
12	а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{3\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{15\pi}{4}$; $\frac{9\pi}{2}$
13	б) $\arccos\frac{2\sqrt{210}}{35}$
14	$(-\infty; -0{,}5)$
15	19
16	б) 8
17	$[-1; 1{,}5\sqrt[3]{4}-2]$
18	а) да; б) нет; в) 80

Вариант 17

№ задания	Ответ
1	10
2	80
3	0,08
4	0,2
5	−2,5
6	216
7	−2
8	175
9	18
10	16
11	−24
12	а) $\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ \frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ -\frac{\pi}{3}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $-3\pi;\ -\frac{7\pi}{3};\ -2\pi$
13	б) 45°
14	$(-\infty;-\sqrt[4]{8}]\cup[-0{,}5;0)\cup(0;0{,}5]\cup[\sqrt[4]{8};+\infty)$
15	29
16	б) $\frac{5}{3}$
17	$-\frac{1}{2};\ 2$
18	а) нет; б) да; в) 306

Вариант 18

№ задания	Ответ
1	35
2	10
3	0,2
4	0,24
5	−0,2
6	3,5
7	28
8	43,75
9	21
10	2,25
11	−15
12	а) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ \frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ \frac{2\pi}{3}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{3};\ -\frac{7\pi}{2};\ -\frac{10\pi}{3}$
13	б) arctg 0,5
14	$[-\sqrt[4]{5};-0{,}04]\cup[0{,}04;\sqrt[4]{5}]$
15	24
16	б) 2,4
17	1; 9
18	а) нет; б) да; в) 552

Вариант 19

№ задания	Ответ
1	2,5
2	7,28
3	0,25
4	0,22
5	−1,5
6	1
7	0,2
8	115
9	135
10	2
11	−34
12	а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; $3\sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
13	б) $0{,}3\sqrt{30}$
14	$(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$
15	1300 тыс. рублей
16	б) 71°
17	$\left(-\frac{15}{7}; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{8}{7}; \frac{15}{7}\right)$
18	а) нет; б) нет; в) $11\frac{2}{11}$

Вариант 20

№ задания	Ответ
1	6
2	7,68
3	0,75
4	0,27
5	−4,5
6	10
7	−0,25
8	220
9	52
10	27
11	0
12	а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $4\sqrt{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
13	б) $\operatorname{arctg} 2$
14	$[-5; 0) \cup (0; 2{,}5]$
15	2541 тыс. рублей
16	б) $3\frac{1}{3}$
17	$\left(-\frac{6}{7}; 0\right] \cup \left(\frac{3}{2}; \frac{24}{7}\right) \cup \left\{\frac{9}{7}\right\}$
18	а) 42; б) положительных; в) 24

Вариант 21

№ задания	Ответ
1	113
2	60
3	0,2
4	0,973
5	5,5
6	324
7	2
8	6250
9	14
10	15
11	7
12	а) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ -\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$ б) $\frac{7\pi}{2};\ \frac{15\pi}{4};\ \frac{9\pi}{2}$
13	б) $\frac{9\sqrt{5}}{4}$
14	$(-\infty;-2\sqrt{3}]\cup[1;\ 1{,}5)$
15	500 тыс. рублей
16	б) 4,8
17	$(-\infty;-2)\cup(-2;-0{,}5)\cup(0{,}5;2)\cup$ $\cup(2;+\infty)\cup\{0\}$
18	а) да; б) нет; в) $\frac{232}{21}$

Вариант 22

№ задания	Ответ
1	0,75
2	45
3	0,3
4	0,9744
5	11
6	−7,5
7	7
8	1,3
9	5
10	3,4
11	1,2
12	а) $\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ -\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$ $-\frac{3\pi}{4}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z};$ б) $\frac{7\pi}{4};\ 2\pi;\ 3\pi$
13	б) $\arccos\frac{14}{55}$
14	$(-\infty;-4]\cup[-\sqrt{10};-3)$
15	20
16	б) 7,5
17	$[1;\ 9)$
18	а) да; б) нет; в) 10

Вариант 23

№ задания	Ответ
1	62
2	25
3	0,25
4	0,3
5	–2
6	80
7	6
8	60
9	75
10	28
11	18
12	а) $-1-\sqrt{2}$; $-1-\sqrt{3}$; б) $-1-\sqrt{2}$
13	б) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$
14	$(-\infty;-1)\cup\{0\}\cup(0,5;+\infty)$
15	35 700 рублей
16	б) $\frac{5\sqrt{26}}{6}$
17	$\left(-\frac{9}{16};-0,5\right)\cup(-0,5;0)\cup(0;2)\cup$ $\cup(2;+\infty)$
18	а) 7; б) 15; в) 14

Вариант 24

№ задания	Ответ
1	78
2	20
3	0,2
4	0,82
5	0
6	28
7	6
8	30
9	10
10	–28
11	–2
12	а) $-2-\sqrt{6}$, $-2+\sqrt{6}$, $\frac{1}{2}-\frac{\log_2 3}{6}$; б) $-2+\sqrt{6}$, $\frac{1}{2}-\frac{\log_2 3}{6}$
13	б) $\frac{30\sqrt{17}}{7}$
14	$[-6;-\sqrt{26,1}]\cup[-\sqrt{25,9};-4]\cup$ $\cup[4;\sqrt{25,9}]\cup[\sqrt{26,1};6]$
15	53 820 рублей
16	б) $\frac{6\sqrt{13}}{5}$
17	$\left(-\frac{25}{16};-1,5\right)\cup(-1,5;0)\cup$ $\cup\left(0;3\frac{1}{6}\right)\cup\left(3\frac{1}{6};+\infty\right)$
18	а) 12; б) 15; в) 6

Вариант 25

№ задания	Ответ
1	37
2	135
3	0,18
4	3
5	0,8
6	0,4
7	−0,2
8	6
9	35
10	−0,4
11	14
12	а) $\pi+2\pi k,\ -\frac{\pi}{3}+4\pi k,\ -\frac{5\pi}{3}+4\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\pi;\ -\frac{\pi}{3};\ \pi$
13	б) 36
14	$\{-1\}\cup\left[\sqrt[4]{2}-2;+\infty\right)$
15	1 080 000 рублей
16	б) $\frac{378-84\sqrt{3}}{23}$
17	$\{6+2\sqrt{57}\}\cup\left(21\frac{1}{3};+\infty\right)$
18	а) нет; б) 21; в) 82

Вариант 26

№ задания	Ответ
1	53
2	72
3	0,38
4	5
5	−4
6	−0,3
7	−0,75
8	96
9	28
10	−13
11	1
12	а) $-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \frac{\pi}{3}+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{3};\ -\frac{5\pi}{3};\ -\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}$
13	б) 189
14	$(-0{,}5;\ 0{,}5)\cup(0{,}5;\ 624{,}5)$
15	1 706 400 рублей
16	б) $91(5\sqrt{2}-7)$
17	$\left(2\sqrt{11}-2;5\frac{5}{6}\right)\cup\{2+2\sqrt{11}\}$
18	а) нет; б) 36; в) 182

Вариант 27

№ задания	Ответ
1	29
2	315
3	0,14
4	0,03
5	4
6	2,72
7	6
8	7
9	77
10	76
11	−3
12	а) $-\frac{\pi}{12}+\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{13\pi}{12}$; $-\frac{\pi}{12}$; $\frac{11\pi}{12}$
13	б) 45°
14	$(-1;0)\cup\{\log_5 3\}$
15	54 925 рублей
16	б) 8
17	$[0;1{,}5)\cup[2;+\infty)$
18	а) да; б) нет; в) 16

Вариант 28

№ задания	Ответ
1	6
2	176
3	0,375
4	0,012
5	−1
6	−3
7	−3
8	28
9	6
10	−5
11	38
12	а) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{13\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{4}$
13	б) $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{21}}{7}$
14	$(-\infty;-2\sqrt{26}]\cup[-\sqrt{4{,}01};-2)\cup$ $\cup(-2;-\sqrt{3{,}99}]\cup[\sqrt{3{,}99};2)\cup$ $\cup(2;\sqrt{4{,}01}]\cup[2\sqrt{26};+\infty)$
15	78 125 рублей
16	б) 18
17	$\left(-1{,}5;-\frac{9}{8}\right]$
18	а) да; б) нет; в) 12

Вариант 29

№ задания	Ответ
1	60
2	18
3	0,24
4	0,2
5	3
6	4
7	4
8	6,5
9	6,4
10	67
11	−21
12	а) $\frac{\pi}{6}k$, $\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}k$, $-\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}k$, где $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{13\pi}{18}$; $-\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{11\pi}{18}$; $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{7\pi}{18}$; $-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{5\pi}{18}$
13	б) $36+30\sqrt{2}$
14	$[2;5)$
15	126 694,4 рубля
16	б) 1
17	$(-\infty;-3]\cup\left\{-\frac{1}{3};0;\frac{1}{3}\right\}\cup[3;+\infty)$
18	а) да; б) нет; в) 2805

Вариант 30

№ задания	Ответ
1	64
2	4
3	0,28
4	0,6
5	4
6	8
7	14
8	9,6
9	22
10	3
11	−8
12	а) $\frac{\pi}{4}k$, $\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi}{2}k$, $-\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi}{2}k$, где $k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{65\pi}{24}$; $\frac{11\pi}{4}$; $\frac{67\pi}{24}$; 3π; $\frac{77\pi}{24}$; $\frac{13\pi}{4}$; $\frac{79\pi}{24}$
13	б) $\frac{5\sqrt{119}}{13}$
14	$(0;5]$
15	1-й объект — 7 человек, 2-й объект — 23 человека; 43 150 рублей
16	б) 50
17	$4<a\le16$
18	а) да; б) нет; в) 2220

Вариант 31

№ задания	Ответ
1	6,5
2	54
3	0,98
4	0,2
5	2
6	−10
7	2
8	25
9	54
10	−7
11	8
12	а) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$ $-\frac{3\pi}{4}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z};$ б) $-\frac{19\pi}{4};\ -\frac{17\pi}{4}$
13	б) $\arccos\frac{31\sqrt{10}}{140}$
14	$[-2;\ 2)$
15	39
16	б) $9\sqrt{2}$
17	$(-2;-1)\cup(-1;0)\cup(0;3)\cup\cup(3;8)\cup(8;+\infty)$
18	а) нет; б) нет; в) 676 г

Вариант 32

№ задания	Ответ
1	30
2	27
3	0,024
4	0,15
5	−2
6	91
7	3
8	17
9	12
10	13
11	−9
12	а) $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$ б) $-\frac{7\pi}{6}$
13	б) $\frac{5\sqrt{17}}{8}$
14	$(-2;\ 1)\cup(1;\ 2)$
15	1,6 млн рублей
16	б) $27\sqrt{3}$
17	$(-\infty;0)\cup(0;3)\cup(3;4)\cup\cup(4;5)\cup(5;6)$
18	а) нет; б) нет; в) 240 г

Вариант 33

№ задания	Ответ
1	72,5
2	47
3	0,28
4	0,097
5	−5
6	65
7	3
8	8
9	48
10	−2,5
11	26
12	а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{21\pi}{4}$; $\frac{23\pi}{4}$; $\frac{25\pi}{4}$
13	б) $13\sqrt{6}$
14	$\left[-\sqrt{\frac{\log_{2,5}6}{2}};\ \sqrt{\frac{\log_{2,5}6}{2}}\right]$
15	2,58
16	б) 5 : 7
17	$\left(-\frac{2\sqrt{3}-1}{2};-\frac{\sqrt{10}-1}{2}\right)\cup$ $\cup\left(-\frac{\sqrt{10}-1}{2};-1\right)\cup\left\{-\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right\}$
18	а) нет; б) нет; в) 3

Вариант 34

№ задания	Ответ
1	68
2	76
3	0,16
4	0,068
5	6
6	16
7	6
8	633
9	64
10	−0,25
11	−1
12	а) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{10\pi}{3}$; $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$
13	б) 48,5
14	$\left[-\log_{1,25}\frac{3}{2};\ -1\right]$
15	4,05
16	б) 10 : 11
17	$[1,4;2)\cup\left\{-\frac{\sqrt{10}+1}{9};\frac{\sqrt{10}-1}{9}\right\}$
18	а) да; б) нет; в) 5

Вариант 35

№ задания	Ответ
1	21
2	200
3	0,56
4	0,9
5	−2
6	7,5
7	0,5
8	0,31
9	20
10	0,75
11	9
12	а) πn, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n$, где $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{13\pi}{4}$; -3π; $-\frac{11\pi}{4}$
13	б) $4\sqrt{3}$
14	$[3-\sqrt{5};\,2{,}8]\cup[3{,}2;\,3+\sqrt{5}]$
15	20
16	б) 1 : 3 : 1
17	[−3; 22]
18	а) да; б) 180; в) 546

Вариант 36

№ задания	Ответ
1	35
2	88
3	0,12
4	12
5	−5
6	2,5
7	5,5
8	1,728
9	756
10	−0,5
11	30
12	а) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{14\pi}{3}$; $-\frac{9\pi}{2}$; $-\frac{13\pi}{3}$
13	б) $6\sqrt{3}$
14	$(-\infty;\,4-2\sqrt{2}]\cup[3{,}5;\,4)\cup(4;\,4{,}5]\cup$ $\cup[4+2\sqrt{2};\,+\infty)$
15	3
16	б) 4 : 5 : 4
17	$(-\infty;\,-3)\cup(-3;\,-1]\cup[3{,}25;\,+\infty)\cup\{1\}$
18	а) да; б) 270; в) 17

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ЗАДАНИЙ 12–18

Количество баллов, выставляемых за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

Вариант 1

12 а) Решите уравнение $2\sin^2 x - 3\cos(-x) - 3 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

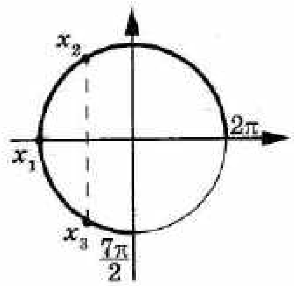
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2 - 2\cos^2 x - 3\cos x - 3 = 0;\; 2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0;\; (\cos x + 1)(2\cos x + 1) = 0.$$

Значит, $\cos x = -1$, откуда $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $\cos x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.



Получаем:

$$x_1 = 2\pi + \pi = 3\pi;$$

$$x_2 = 3\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{8\pi}{3};$$

$$x_3 = 3\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}.$$

Ответ: а) $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$;

б) $\frac{8\pi}{3}$; 3π; $\frac{10\pi}{3}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решением линейных неравенств и т. п.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

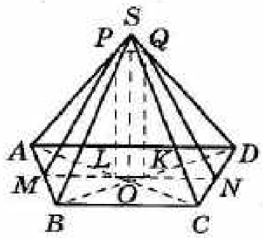
13 В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ с бо́льшим основанием AD. Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD соответственно. Плоскость α проходит через точки M и N параллельно прямой SO.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α является трапецией.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α, если $AD = 9$, $BC = 7$, $SO = 6$, а прямая SO перпендикулярна прямой AD.

Решение.

а) Пусть плоскость α пересекает прямые SA, SD, BD и AC в точках P, Q, K и L соответственно.



Отрезок MN — средняя линия трапеции $ABCD$, значит, он параллелен её основанию AD. Значит, плоскость α параллельна прямой AD и пересекает плоскость SAD по прямой, параллельной MN. Плоскость α, параллельная прямой SO, пересекает ребро AS в точке P, а ребро DS — в точке Q. Значит, сечением пирамиды $SABCD$ плоскостью α является многоугольник $MPQN$, у которого стороны MN и PQ параллельны.

Прямые KQ и PL параллельны прямой SO, поскольку являются прямыми пересечений плоскости α с плоскостями BSD и ASC, содержащими прямую SO, параллельную плоскости α. Следовательно, четырёхугольник $PQKL$ — параллелограмм, а значит, $PQ = KL = \dfrac{AD - BC}{2} < MN$ (точки K и L — середины диагоналей BD и AC соответственно).

Таким образом, многоугольник $MPQN$ — трапеция.

б) Прямая SO перпендикулярна прямой AD, прямые PL и SO параллельны, прямые MN и AD параллельны, значит, отрезок PL перпендикулярен отрезку MN и является высотой трапеции $MPQN$.

В трапеции $ABCD$:

$$AO : OC = AD : BC = 9 : 7;\ AO = \frac{9}{16}AC,\ AL = \frac{AC}{2};\ AL : AO = \frac{AC}{2} : \frac{5AC}{9} = \frac{8}{9}.$$

Рассмотрим плоскость ASC. Прямые SO и PL параллельны, значит,

$$\frac{PL}{SO} = \frac{AL}{AO} = \frac{8}{9};\ PL = \frac{8}{9}SO = \frac{16}{3}.$$

Площадь трапеции $MPQN$ равна

$$\frac{1}{2}(MN+PQ)\cdot PL=\frac{1}{2}\left(\frac{AD+BC}{2}+\frac{AD-BC}{2}\right)\cdot PL=\frac{AD}{2}\cdot PL=\frac{9}{2}\cdot\frac{16}{3}=24.$$

Ответ: б) 24.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

14 Решите неравенство $4^x+\frac{112}{4^x-32}\le 0$.

Решение.

Пусть $t=4^x$, тогда неравенство примет вид:

$$t+\frac{112}{t-32}\le 0;\ \frac{t^2-32t+112}{t-32}\le 0;\ \frac{(t-4)(t-28)}{t-32}\le 0,$$

откуда $t\le 4$; $28\le t<32$.

При $t\le 4$ получим: $4^x\le 4$, откуда $x\le 1$.

При $28\le t<32$ получим: $28\le 4^x<32$, откуда $\log_4 28\le x<2{,}5$.

Решение исходного неравенства: $x\le 1$; $\log_4 28\le x<2{,}5$.

Ответ: $(-\infty;1]\cup[\log_4 28;2{,}5)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек 1 и/или $\log_4 28$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

15 В июле 2027 года планируется взять кредит на три года в размере 1200 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг будет возрастать на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– платежи в 2028 и 2029 годах должны быть равными;
– к июлю 2030 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что платёж в 2030 году составит 673,2 тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж 2028 года?

Решение.

Пусть платежи в 2028 и 2029 годах составят по x тыс. рублей.

В январе 2028 года долг (в тыс. рублей) будет равен 1320, а в июле равен $1320-x$. В январе 2029 года долг будет равен $1452-1{,}1x$, а в июле равен $1452-2{,}1x$. В январе 2030 года долг будет равен $1597{,}2-2{,}31x$.

По условию, к июлю 2030 года долг должен быть выплачен полностью, значит, платёж в 2030 году должен быть равен $(1597{,}2-2{,}31x)$ тыс. рублей. Получаем:

$$1597{,}2-2{,}31x=673{,}2;\quad 2{,}31x=924,$$

откуда $x=400$.

Платёж в 2028 году должен быть равен 400 тыс. рублей.

Ответ: 400 тыс. рублей.

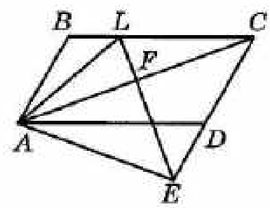
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В параллелограмме $ABCD$ угол BAC вдвое больше угла CAD. Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BC в точке L. На продолжении стороны CD за точку D выбрана такая точка E, что $AE=CE$.

а) Докажите, что $AL:AC=AB:BC$.

б) Найдите EL, если $AC=21$, $\operatorname{tg}\angle BCA=0{,}4$.

Решение.



а) Пусть $\angle CAD=\alpha$, тогда $\angle BAC=2\alpha$. Поскольку AL — биссектриса угла BAC, $\angle BAL=\angle LAC=\alpha$.

Противоположные стороны параллелограмма $ABCD$ параллельны, следовательно,

$$\angle ALB=\angle LAD=2\alpha,\quad \angle ACD=\angle BAC=2\alpha.$$

Получаем:

$$\angle BAL=\angle DAC=\alpha,\quad \angle ALB=\angle ACD=2\alpha.$$

Треугольники ABL и ADC подобны по двум углам, откуда следует, что

$$\frac{AL}{AC}=\frac{AB}{AD}=\frac{AB}{BC}.$$

Получаем, что $AL:AC=AB:BC$.

б) В параллелограмме $ABCD$ имеем

$$\angle BCA=\angle CAD=\alpha \text{ и } \operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\angle BCA=0{,}4.$$

Треугольник ALC равнобедренный, поскольку $\angle LAC=\angle LCA=\alpha$, значит, $AL=LC$. Треугольники ALE и CLE равны по трём сторонам, следовательно, луч LE — биссектриса угла ALC. Биссектриса LF равнобедренного треугольника ALC является его медианой и высотой, то есть $\angle LFC=90^\circ$, $CF=\frac{AC}{2}=10{,}5$.

В прямоугольном треугольнике LFC

$$LF=CF\cdot\operatorname{tg}\angle LCF=10{,}5\operatorname{tg}\alpha=10{,}5\cdot0{,}4=4{,}2.$$

В прямоугольном треугольнике CFE

$$FE=CF\cdot\operatorname{tg}\angle FCE=10{,}5\operatorname{tg}2\alpha=\frac{21\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=10.$$

Получаем: $LE=LF+FE=4{,}2+10=14{,}2$.

Ответ: б) 14,2.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(a-x)^2+4a+1=(2x+1)^2-8|x|$$

имеет четыре различных корня.

Решение.

Запишем уравнение $(a-x)^2+4a+1=(2x+1)^2-8|x|$ в виде:

$$a^2-2ax+x^2+4a+1=4x^2+4x+1-8|x|;\quad a^2-2ax-3x^2+4a-4x+8|x|=0.$$

При $x \le 0$ уравнение

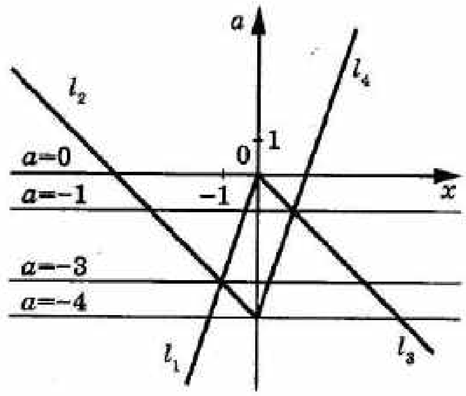
$$a^2-2ax-3x^2+4a-4x+8|x|=0$$

принимает вид:

$$a^2-2ax-3x^2+4a-12x=0;$$

$$(a-3x)(a+x)+4(a-3x)=0;$$

$$(a-3x)(a+x+4)=0.$$



Получившееся уравнение задаёт на плоскости Oxa пару лучей: луч l_1 с началом в точке (0; 0), совпадающий с прямой $a=3x$ при $x \le 0$, и луч l_2 с началом в точке (0; −4), совпадающий с прямой $a=-x-4$ при $x \le 0$. Лучи l_1 и l_2 пересекаются в точке (−1; −3).

При $x \ge 0$ уравнение $a^2-2ax-3x^2+4a-4x+8|x|=0$ принимает вид:

$$a^2-2ax-3x^2+4a+4x=0;\ (a-3x)(a+x)+4(a+x)=0;\ (a+x)(a-3x+4)=0.$$

Получившееся уравнение задаёт на плоскости Oxa пару лучей: луч l_3 с началом в точке (0; 0), совпадающий с прямой $a=-x$ при $x \ge 0$, и луч l_4 с началом в точке (0; −4), совпадающий с прямой $a=3x-4$ при $x \ge 0$. Лучи l_3 и l_4 пересекаются в точке (1; −1).

Число корней исходного уравнения равно числу точек пересечения прямой $a=c$ с объединением лучей l_1, l_2, l_3 и l_4.

Каждый из лучей l_1 и l_2 пересекается с прямой $a=c$ в одной точке при $c \le 0$ и не пересекается при $c>0$.

Каждый из лучей l_2 и l_4 пересекается с прямой $a=c$ в одной точке при $c \ge -4$ и не пересекается при $c<-4$.

Следовательно, при $a>0$ и $a<-4$ исходное уравнение имеет два различных корня.

При $c=0$, $c=-1$, $c=-3$ и $c=-4$ прямая $a=c$ проходит через общую точку лучей l_1 и l_3, l_3 и l_4, l_1 и l_2, l_2 и l_4 соответственно.

Следовательно, при $a=0$, $a=-1$, $a=-3$ и $a=-4$ исходное уравнение имеет ровно три корня, а при $-4<a<-3$, $-3<a<-1$ и $-1<a<0$ имеет четыре различных корня.

Ответ: $(-4;-3)\cup(-3;-1)\cup(-1;-0)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a=0$ и/или $a=-4$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток (−4; 0) множества значений a, возможно, с включением граничных точек и/или исключением точек $a=-3$ и/или $a=-1$ ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2

Окончание табл.

Содержание критерия	Баллы
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

18 Есть три коробки: в первой коробке 112 камней, во второй — 99, а третья – пустая. За один ход берут по одному камню из любых двух коробок и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.

а) Могло ли в первой коробке оказаться 103 камня, во второй — 99, а в третьей — 9?

б) Могло ли в третьей коробке оказаться 211 камней?

в) Во второй коробке оказалось 4 камня. Какое наибольшее число камней могло оказаться в третьей коробке?

Решение.

а) Пусть 6 раз из первых двух коробок переложили камни в третью. Тогда в первой коробке оказалось 106 камней, во второй — 93 камня, а в третьей — 12 камней. Если после этого 3 раза переложить камни из первой и третьей коробок во вторую, то в первой коробке окажется 103 камня, во второй — 99, а в третьей — 9.

б) Если в третьей коробке оказалось 211 камней, то в первой и во второй коробках не осталось камней.

Пусть в какой-то момент в коробках оказалось a, b и c камней соответственно. Тогда после одного хода в коробках могло оказаться либо $a-1$, $b-1$ и $c+2$ камня, либо $a-1$, $b+2$ и $c-1$ камень, либо $a+2$, $b-1$ и $c-1$ камень соответственно. Заметим, что разность между числами камней во второй и в первой коробках либо не изменилась, либо изменилась на 3. Сначала разность чисел камней во второй и в первой коробках равнялась 13. Следовательно, ни в какой момент она не могла стать равной 0. Значит, в этих двух коробках всегда разное число камней. Следовательно, в третьей коробке не могло оказаться 211 камней.

в) В любой момент разность чисел камней в первой и во второй коробках равна $3k+13$, где k — целое число. Следовательно, если во второй коробке 4 камня, то в первой коробке $3k+17$ камней. Значит, в первой коробке оказалось не меньше 2 камней, а в третьей коробке не больше 205 камней.

Покажем, как в третьей коробке могло оказаться 205 камней. Пусть 99 раз из первых двух коробок переложили камни в третью. Тогда в первой коробке оказалось 13 камней, во второй — 0 камней, а в третьей — 198 камней. Если после этого 5 раз переложить камни из первой и третьей коробок во вторую, то в первой коробке окажется 8 камней, во второй — 10, а в третьей — 193. Если после этого 6 раз переложить камни из первых двух коробок в третью, то в первой коробке окажется 2 камня, во второй — 4 камня, а в третьей — 205 камней.

Ответ: а) да; б) нет; в) 205.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Вариант 7

12 а) Решите уравнение $\log_2^2(4x^2)+3\log_{0,5}(8x)=1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [0,15; 1,5].

Решение.

а) Преобразуем уравнение: $\log_2^2(4x^2)+3\log_{0,5}(8x)-1=0$;

$$(2+2\log_2 x)^2-3(3+\log_2 x)-1=0;$$

$$4\log_2^2 x+5\log_2 x-6=0;\ (\log_2 x+2)(4\log_2 x-3)=0.$$

Значит, $\log_2 x=-2$, откуда $x=0,25$ или $\log_2 x=0,75$, откуда $x=\sqrt[4]{8}$.

б) $8>\frac{81}{16}$, следовательно, $8>\left(\frac{3}{2}\right)^4$, откуда $\sqrt[4]{8}>1,5$. Значит, корень $x=\sqrt[4]{8}$ не принадлежит отрезку [0,15; 1,5].

$0,15<0,25<1,5$, значит, корень $x=0,25$ принадлежит отрезку [0,15; 1,5].

Ответ: а) 0,25; $\sqrt[4]{8}$;
б) 0,25.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

13 Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ относится к боковому ребру как $1:\sqrt{2}$. Через вершину D проведена плоскость α, перпендикулярная боковому ребру SB и пересекающая его в точке M.

а) Докажите, что M — середина SB.

б) Найдите расстояние между прямыми AC и DM, если высота пирамиды равна $6\sqrt{3}$.

Решение.

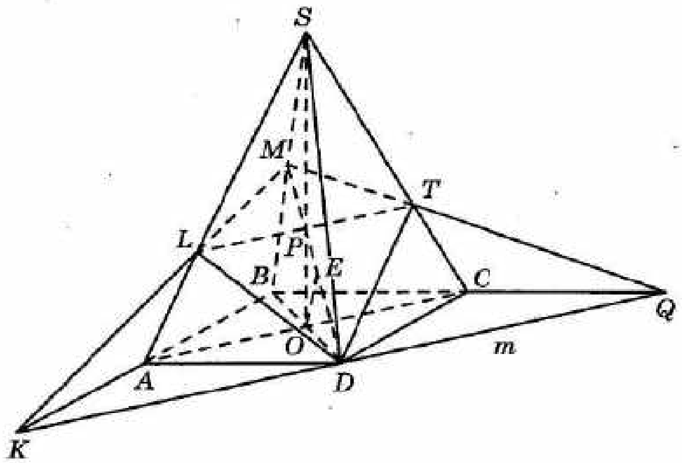
а) Пусть O — центр основания пирамиды $SABCD$. Через точку D проведём прямую m, параллельную прямой AC. Прямая m перпендикулярна BD, поэтому по теореме о трёх перпендикулярах прямая m перпендикулярна BS.

В треугольнике DBS опустим высоту DM на сторону BS. Тогда плоскость, проходящая через прямые m и DM — это искомая плоскость α, так как она перпендикулярна прямой BS по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

Обозначим точки пересечения прямой m с прямыми AB и BC соответственно K и Q.

Пусть прямая KM пересекает ребро SA в точке L, а прямая MO пересекает ребро SC в точке T. Четырёхугольник $DLMT$ — искомое сечение.

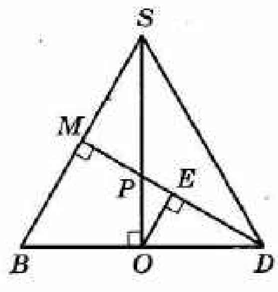
Пусть $AB = x$, $BS = x\sqrt{2}$, тогда $AC = BD = x\sqrt{2}$. Треугольник BSD — равносторонний, поэтому высота DM является в нём также и медианой, поэтому M — середина SB.



б) Обозначим P точку пересечения высоты SO пирамиды $SABCD$ с плоскостью α. Точка P лежит в плоскости SBD, так как прямая SO содержится в этой плоскости.

В треугольнике OPD из вершины O опустим перпендикуляр OE на сторону PD.

Прямая AC перпендикулярна плоскости OPD, в которой лежит OE, поэтому OE является общим перпендикуляром для скрещивающихся прямых AC и DM.



Треугольник BSD является равносторонним, поэтому $MD = SO = 6\sqrt{3}$. Отсюда получаем, что $PO = \frac{1}{3}SO = 2\sqrt{3}$, $PD = \frac{2}{3}MD = 4\sqrt{3}$, $OD = \frac{SO}{\sqrt{3}} = 6$.

Найдём высоту OE треугольника POD:

$$OE = \frac{PO \cdot OD}{PD} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 6}{4\sqrt{3}} = 3.$$

Ответ: б) 3.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

14 Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x+4}\left(8-3^{2+x^2}\right)}{4^{x-1}-3} \le 0$.

Решение.

$3^{2+x^2} \ge 9$, откуда $8-3^{2+x^2} < 0$. Следовательно, неравенство $\dfrac{\sqrt{x+4}}{4^{x-1}-3} \ge 0$ равносильно данному.

Значит, $x = -4$ или $\begin{cases} 4^{x-1} > 3; \\ x > -4, \end{cases}$ откуда $x > 1 + \log_4 3$.

Ответ: $\{-4\} \cup \left(\log_4 12; +\infty\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки −4, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

15 15 июня 2025 года Сергей Данилович планирует взять кредит в банке на 4 года в размере целого числа миллионов рублей. Условия его возврата таковы:

– в январе каждого года действия кредита долг увеличивается на 15 % от суммы долга на конец предыдущего года;
– в период с февраля по июнь в каждый из 2026 и 2027 годов необходимо выплатить только начисленные в январе проценты по кредиту;
– в период с февраля по июнь в каждый из 2028 и 2029 годов выплачиваются равные суммы, причём последний платёж должен погасить долг по кредиту полностью.

Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат по кредиту превысит 12 млн рублей.

Решение.

Пусть сумма кредита равна S млн рублей, а выплаты с февраля по июнь в 2028 и 2029 годах составляют по x млн рублей. В июле 2026 и 2027 годов долг перед банком не меняется, а ежегодные выплаты составляют по $0{,}15S$ млн рублей — всего $0{,}3S$ за два года.

В 2028 году долг (в млн рублей) составит: $1{,}15S$ на конец января и $(1{,}15S - x)$ на конец июня. В 2029 году долг (в млн рублей) составит: $1{,}15(1{,}15S - x)$ на конец января и $1{,}15(1{,}15S - x) - x$ на конец июня.

Последний платёж должен погасить долг по кредиту полностью, поэтому $1{,}15(1{,}15S - x) - x = 0$, откуда

$$x = \frac{529S}{860},$$

а все выплаты по кредиту равны

$$0{,}3S + 2x = 0{,}3S + \frac{529S}{430} = \frac{329S}{215}.$$

По условию $\frac{329S}{215} > 12$, откуда $S > \frac{2580}{329} = 7\frac{277}{329}$.

Размер кредита — целое число миллионов рублей, значит, наименьший размер кредита $S = 8$ млн рублей.

Ответ: 8 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

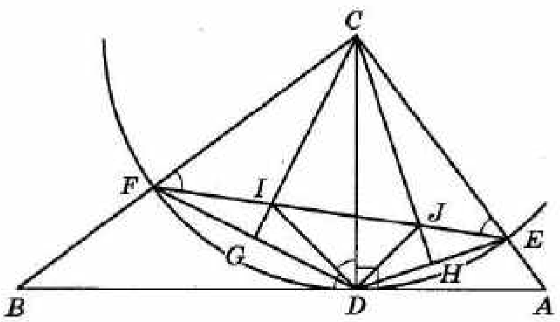
16 Окружность с центром в точке C касается гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC и пересекает его катеты AC и BC в точках E и F. Точка D — основание высоты, опущенной из вершины C. I и J — центры окружностей, вписанных в треугольники BCD и ACD.

а) Докажите, что I и J лежат на отрезке EF.

б) Найдите расстояние от точки C до прямой IJ, если $AC = 15$, $BC = 20$.

Решение.

а) Окружность с центром C касается AB в точке D, так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной. Отрезки CF, CD и CE равны как радиусы, поэтому треугольник CFE — прямоугольный и равнобедренный, значит, $\angle CFE = \angle CEF = 45°$.



В равнобедренном треугольнике CFD проведём биссектрису из вершины C. Обозначим через I_1 её точку пересечения с хордой EF.

Треугольники CFI_1 и CDI_1 равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $\angle CDI_1 = \angle CFI_1 = 45°$.

Отсюда получаем, что $\angle I_1DB = \angle BDC - \angle CDI_1 = 90° - 45° = 45°$.

Таким образом, в треугольнике BCD точка I_1 лежит на пересечении биссектрис углов C и D, то есть I_1 — центр окружности, вписанной в треугольник BCD, поэтому точки I и I_1 совпадают. Значит, точка I лежит на отрезке EF.

Аналогично доказывается, что точка J лежит на отрезке EF.

б) Из треугольника ABC по теореме Пифагора находим, что

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 \cdot 5^2 + 4^2 \cdot 5^2} = 25.$$

Так как $S_{ABC} = \dfrac{BC \cdot AC}{2} = \dfrac{CD \cdot AB}{2}$, то $CD = \dfrac{BC \cdot AC}{AB} = \dfrac{15 \cdot 20}{25} = 12$.

Таким образом, $CE = CF = CD = 12$.

Из треугольника CEF находим, что $EF = 12\sqrt{2}$.

Так как прямые IJ и EF совпадают, то расстояние от точки C до прямой IJ равно высоте равнобедренного прямоугольного треугольника CEF, проведённой из вершины C, то есть $\dfrac{1}{2}EF = 6\sqrt{2}$.

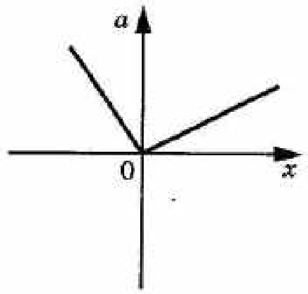
Ответ: б) $6\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

17 Найдите все значения a, при каждом из которых оба уравнения $a+\frac{x}{2}=|x|$ и $a\sqrt{2}+x=\sqrt{2a\sqrt{2}x-x^2+12}$ имеют ровно по 2 различных корня, и строго между корнями каждого из уравнений лежит корень другого уравнения.

Решение.

Изобразим на плоскости с координатами $(x; a)$ множество решений первого уравнения. При $x \geq 0$ получаем $a=\frac{x}{2}$, а при $x<0$ получаем $a=-\frac{3x}{2}$.



Возведём второе уравнение в квадрат:

$$\begin{cases} 2a^2+2ax\sqrt{2}+x^2=2a\sqrt{2}x-x^2+12, \\ a\sqrt{2}+x\geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+x^2=6, \\ a\sqrt{2}+x\geq 0. \end{cases}$$

Эта система задаёт дугу окружности на плоскости с координатами $(x; a)$ с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{6}$. Координаты концов дуги окружности найдём, решив систему

$$\begin{cases} a^2+x^2=6, \\ a\sqrt{2}+x=0. \end{cases}$$

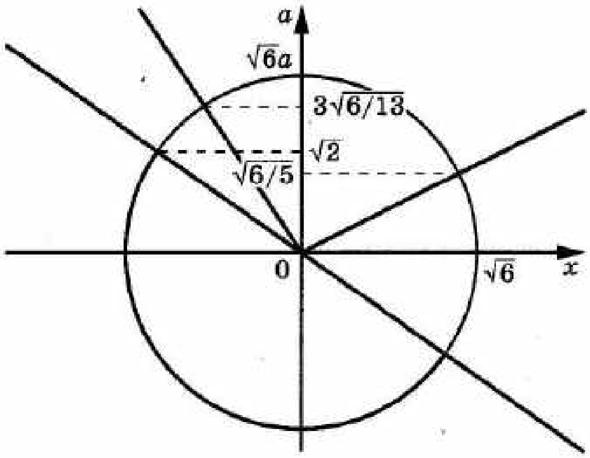
Получаем $x=2, a=-\sqrt{2}$ и $x=-2, a=\sqrt{2}$.

Найдём точки пересечения этой дуги окружности и множества, задаваемого первым уравнением:

$\begin{cases} a^2+x^2=6, \\ a\sqrt{2}+x\ge 0, \\ x=2a, \\ x\ge 0, \end{cases}$ откуда $x=2\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}, a=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}};$

$\begin{cases} a^2+x^2=6, \\ a\sqrt{2}+x\ge 0, \\ x=-\dfrac{2a}{3}, \\ x<0, \end{cases}$ откуда $x=-2\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{13}}, a=3\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{13}}.$

Изобразим решения обоих уравнений на плоскости, учитывая, что $\sqrt{\dfrac{6}{5}}<\sqrt{2}<3\sqrt{\dfrac{6}{13}}$:



Первое уравнение имеет два корня при $a>0$, а второе уравнение имеет два корня при $\sqrt{2}\le a<\sqrt{6}$. Они чередуются при $\sqrt{2}\le a<\dfrac{3\sqrt{6}}{\sqrt{13}}$.

Ответ: $\left[\sqrt{2};\dfrac{3\sqrt{6}}{\sqrt{13}}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только исключением точки $a=\sqrt{2}$ или включением точки $a=\dfrac{3\sqrt{6}}{\sqrt{13}}$	3
С помощью верного рассуждения найдены значения $a=-\sqrt{2}$, $a=\sqrt{2}$, $a=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$, $a=\dfrac{3\sqrt{6}}{\sqrt{13}}$ ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2

Окончание табл.

Содержание критерия	Баллы
Задача сведена к исследованию взаимного расположения дуги окружности и множества решений уравнения $a+\frac{x}{2}=\lvert x\rvert$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

18 Трёхзначное число, меньшее 910, поделили на сумму его цифр и получили натуральное число n.

а) Может ли n равняться 68?
б) Может ли n равняться 86?
в) Какое наибольшее значение может принимать m, если все цифры ненулевые?

Решение.

Пусть дано трёхзначное число $\overline{abc}$ и $\overline{abc}=n(a+b+c)$.

а) Может, например, $\frac{612}{6+1+2}=68$.

б) Пусть дано трёхзначное число $\overline{abc}=86(a+b+c)$. Тогда

$$86=\frac{100a+10b+c}{a+b+c},$$
$$76b+85c=14a.$$

Значит, c чётно. Но если $c\geq 2$, то $a\geq\frac{85\cdot 2}{14}>10$, что невозможно, поэтому $c=0$. Из равенства $14a=76b$ получим, что a делится на 19. Противоречие.

в) Получим оценку для n:

$$n=\frac{100a+10b+c}{a+b+c}=1+\frac{99a+9b}{a+b+c}\leq$$
$$\leq 1+\frac{99a+9b}{a+b+1}=1+\frac{9a+9b+9}{a+b+1}+\frac{90a-9}{a+b+1}=$$
$$=10+\frac{90a-9}{a+b+1}\leq 10+\frac{90a-9}{a+2}=10+\frac{90a+180}{a+2}-\frac{189}{a+2}=$$
$$=100-\frac{189}{a+2}\leq 100-\frac{189}{11}<83.$$

1) Если $n=82$, то $18a=72b+81c$, откуда $2a=8b+9c$. Число c чётно, значит, $c\geq 2$. Но тогда либо $b=0$, либо $a>9$. Противоречие.

2) Если $n=81$, то $19a=71b+80c$. Тогда $b=c=1$: иначе $a\geq\frac{71\cdot 2+80}{19}>10$. Но уравнение $19a=151$ не имеет целых решений. Противоречие.

3) Если $n=80$, то $20a=70b+79c$, откуда c кратно 10. Противоречие.

4) Пример для $n=79$: $\frac{711}{7+1+1}=79$.

Ответ: а) да, б) нет, в) 79.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Вариант 11

12 а) Решите уравнение $2\sin^3(\pi+x)=\frac{1}{2}\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

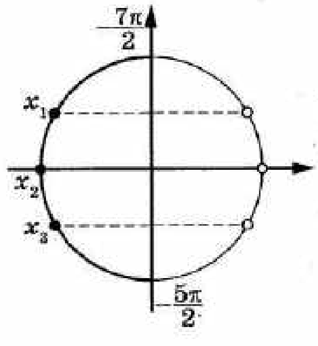
$$-2\sin^3 x=-\frac{1}{2}\sin x;$$

$$4\sin^3 x-\sin x=0;\ \sin x\cdot\left(4\sin^2 x-1\right)=0.$$

Значит, $\sin x=0$, откуда $x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$;

или $\sin x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, или $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$;

или $\sin x=-\frac{1}{2}$, откуда $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi p,\ p\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi l,\ l\in\mathbb{Z}$.



б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-\frac{5\pi}{2}\right]$.

Получим

$$x_1=-\frac{7\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=-\frac{19\pi}{6};$$

$$x_2=-\frac{7\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=-3\pi;$$

$$x_3=-\frac{5\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=-\frac{17\pi}{6}.$$

Ответ: а) $\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ \frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ \frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z};$

$-\frac{\pi}{6}+2\pi p,\ p\in\mathbb{Z};\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi l,\ l\in\mathbb{Z}.$

б) $-\frac{19\pi}{6};\ -3\pi;\ -\frac{17\pi}{6}.$

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решением линейных неравенств и т. п.

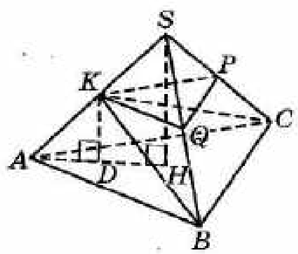
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

13 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 16, высота SH равна 10. Точка K — середина бокового ребра SA. Плоскость, параллельная плоскости ABC, проходит через точку K и пересекает рёбра SB и SC в точках Q и P соответственно.

а) Докажите, что площадь четырёхугольника $BCPQ$ составляет $\frac{3}{4}$ площади треугольника SBC.

б) Найдите объём пирамиды $KBCPQ$.

Решение.



а) Прямая KQ лежит в плоскости KQP, параллельной плоскости ABC. Следовательно, прямые KQ и AB не имеют общих точек, а поскольку эти прямые лежат в одной и той же плоскости SAB, они параллельны. Тогда по теореме Фалеса точка Q — середина ребра SB. Аналогично точка P — середина ребра SC. Таким образом, отрезок QP — средняя линия треугольника SBC. Отсюда следует, что площадь треугольника SQP составляет четверть площади треугольника SBC, а тогда площадь четырёхугольника $BCPQ$ составляет $\frac{3}{4}$ площади треугольника SBC.

б) Пусть отрезок KD — высота пирамиды $KABC$. Прямые SH и KD параллельны, а точка K — середина отрезка SA, значит, отрезок KD является средней линией треугольника ASH и $KD=\frac{SH}{2}$.

Объём пирамиды $SABC$ равен $\frac{1}{3}\cdot SH\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot AB^2=\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot 10\cdot 16^2=\frac{640\sqrt{3}}{3}$. Объём пирамиды $KABC$ равен $\frac{1}{3}\cdot\frac{SH}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2=\frac{320\sqrt{3}}{3}$.

Значит, объём пирамиды $KSBC$ равен $\frac{640\sqrt{3}}{3}-\frac{320\sqrt{3}}{3}=\frac{320\sqrt{3}}{3}$.

Пирамиды $KSBC$ и $KBCPQ$ имеют общую высоту, равную расстоянию h от точки K до плоскости SBC. Пусть S_1 — площадь треугольника SBC, тогда площадь четырёхугольника $BCPQ$ равна $\frac{3S_1}{4}$.

Объём пирамиды $KSBC$ равен $\frac{S_1h}{3}$. С другой стороны, он равен $\frac{320\sqrt{3}}{3}$, откуда $S_1h=320\sqrt{3}$.

Объём пирамиды $KBCPQ$ равен $\frac{1}{3}\cdot h\cdot\frac{3S_1}{4}=\frac{S_1h}{4}=80\sqrt{3}$.

Ответ: б) $80\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

14 Решите неравенство $\left(4^x-5\cdot2^x\right)^2-20\left(4^x-5\cdot2^x\right)\le96$.

Решение.

Пусть $t=2^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\left(t^2-5t\right)^2-20\left(t^2-5t\right)-96\le0;\ \left(t^2-5t-24\right)\left(t^2-5t+4\right)\le0;$$

$$(t+3)(t-8)(t-1)(t-4)\le0,$$

откуда $-3\le t\le1$; $4\le t\le8$.

При $-3\le t\le1$ получим $-3\le2^x\le1$, откуда $x\le0$.

При $4\le t\le8$ получим $4\le2^x\le8$, откуда $2\le x\le3$.

Решение исходного неравенства: $x\le0$; $2\le x\le3$.

Ответ: $(-\infty;\,0]$; $[2;\,3]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек 0, 2 и/или 3, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на 8 лет. Условия его возврата таковы:

– в январе 2026, 2027, 2028 и 2029 годов долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
– в январе 2030, 2031, 2032 и 2033 годов долг возрастает на 18 % по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– к июлю 2033 года кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1125 тысяч рублей?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S тысяч рублей. По условию, долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на июль 2025–2033 годов должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$S;\ \frac{7S}{8};\ \frac{6S}{8};\ \frac{5S}{8};\ \frac{4S}{8};\ \frac{3S}{8};\ \frac{2S}{8};\ \frac{S}{8};\ 0.$$

В январе каждого года с 2026 по 2029 долг возрастает на 20 %, а в январе каждого года с 2030 по 2033 — на 18 %, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) в январе 2026–2033 годов такова:

$$1{,}2\cdot S;\ 1{,}2\cdot\frac{7S}{8};\ 1{,}2\cdot\frac{6S}{8};\ 1{,}2\cdot\frac{5S}{8};\ 1{,}18\cdot\frac{4S}{8};\ 1{,}18\cdot\frac{3S}{8};\ 1{,}18\cdot\frac{2S}{8};\ 1{,}18\cdot\frac{S}{8}.$$

Следовательно, выплаты (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$0{,}2\cdot S+\frac{S}{8};\ 0{,}2\cdot\frac{7S}{8}+\frac{S}{8};\ 0{,}2\cdot\frac{6S}{8}+\frac{S}{8};\ 0{,}2\cdot\frac{5S}{8}+\frac{S}{8};$$

$$0{,}18\cdot\frac{4S}{8}+\frac{S}{8};\ 0{,}18\cdot\frac{3S}{8}+\frac{S}{8};\ 0{,}18\cdot\frac{2S}{8}+\frac{S}{8};\ 0{,}18\cdot\frac{S}{8}+\frac{S}{8}.$$

Значит, общая сумма выплат (в тыс. рублей) составит

$$0{,}2\cdot\left(S+\frac{7S}{8}+\frac{6S}{8}+\frac{5S}{8}\right)+0{,}18\cdot\left(\frac{4S}{8}+\frac{3S}{8}+\frac{2S}{8}+\frac{S}{8}\right)+8\cdot\frac{S}{8}=$$

$$=0{,}2\cdot\frac{13S}{4}+0{,}18\cdot\frac{5S}{4}+S=1{,}875S,$$

откуда $1{,}875S=1125$; $S=600$.

Значит, сумма, взятая в кредит, равна 600 тыс. рублей.

Ответ: 600 тыс. рублей.

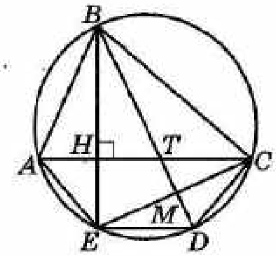
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

16 Точки A, B, C, D и E лежат на окружности в указанном порядке, причём $AE=ED=CD$, а прямые AC и BE перпендикулярны. Отрезки AC и BD пересекаются в точке T.

а) Докажите, что прямая EC пересекает отрезок TD в его середине.

б) Найдите площадь треугольника ABT, если $BD=6$, $AE=\sqrt{6}$.

Решение.



а) Обозначим точку пересечения прямой EC и отрезка TD через M, а точку пересечения отрезков AC и BE через H. Угол BMC равен полусумме дуг BC и DE, а угол BHC равен полусумме дуг BC и AE. Дуги AE, ED и CD меньше $180°$ и стягиваются равными хордами. Следовательно, эти дуги равны. Значит,

$$\angle BMC=\angle BHC=90° \text{ и } \angle ACE=\angle DCE.$$

В треугольнике TCD отрезок CM является биссектрисой и высотой, поэтому этот треугольник равнобедренный, $TC=CD$, а точка M — середина отрезка TD.

б) Дуги AE и CD равны, значит, $\angle ACE=\angle CED$, следовательно, прямые AC и DE параллельны, а $\angle BED=90°$.

Обозначим $\angle DBE$ через α. Тогда $\sin\alpha=\frac{ED}{BD}=\frac{AE}{BD}=\frac{\sqrt{6}}{6}$; $\cos\alpha=\frac{\sqrt{30}}{6}$,

$$\angle ABE=\angle DBE=\angle DBC=\alpha;\ \angle EAC=\angle EBC=2\alpha.$$

В треугольнике ABT отрезок BH является биссектрисой и высотой, поэтому этот треугольник равнобедренный, $AB=BT$, а точка H — середина отрезка AT.

Получаем:

$$AH = AE\cdot\cos\angle EAC = AE\cdot\cos 2\alpha = AE\cdot\left(1-2\sin^2\alpha\right)=\frac{2\sqrt{6}}{3};$$

$$AT = 2AH = \frac{4\sqrt{6}}{3};\ BH = AH\cdot\operatorname{ctg}\angle ABH = AH\cdot\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2\sqrt{30}}{3}.$$

Значит, площадь треугольника ABT равна

$$\frac{AT\cdot BH}{2}=\frac{8\sqrt{5}}{3}.$$

Ответ: б) $\frac{8\sqrt{5}}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б* .	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2-a^2\right|=|x+a|\cdot\sqrt{x^2-4ax+5a}$$

имеет ровно один корень.

Решение.

Исходное уравнение равносильно уравнению:

$$|x+a|\cdot|x-a|=|x+a|\cdot\sqrt{x^2-4ax+5a};\ |x+a|\cdot\left(|x-a|-\sqrt{x^2-4ax+5a}\right)=0.$$

Рассмотрим два случая.

Первый случай: $|x+a|=0$ при условии $x^2-4ax+5a\ge 0$. Получаем: $x=-a$. Условие принимает вид $5a^2+5a\ge 0$, откуда $a\le -1$; $a\ge 0$.

Второй случай: $|x-a|-\sqrt{x^2-4ax+5a}=0$. Получаем:

$$|x-a|=\sqrt{x^2-4ax+5a};\ x^2-2ax+a^2=x^2-4ax+5a;\ 2ax=5a-a^2,$$

откуда либо x — любое число при $a=0$, либо $x=\frac{5-a}{2}$ при $a\ne 0$.

Корни $x=-a$ и $x=\frac{5-a}{2}$ совпадают при $a=-5$.

Таким образом, исходное уравнение имеет единственный корень при $-1<a<0$ и $a=-5$.

Ответ: $(-1;\,0)$; -5.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только исключением точки $a=-1$	3
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек: $a=0$ и/или $a=-5$, возможно, с исключением точки $a=-1$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача сведена к исследованию корней двух уравнений: $x+a=0$ при условии $x^2-4ax+5a\geq 0$, $2ax=5a-a^2$ при всех значениях a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

18 На доске написаны три различных натуральных числа. Второе число равно сумме цифр первого, а третье равно сумме цифр второго.

а) Может ли сумма этих чисел быть равна 2022?

б) Может ли сумма этих чисел быть равна 2021?

в) В тройке чисел первое число трёхзначное, а третье равно 2. Сколько существует таких троек?

Решение.

а) Пусть на доске написаны числа 2009, 11 и 2. Тогда их сумма равна 2022.

б) Заметим, что сумма цифр числа имеет такой же остаток при делении на 3, как само число. Следовательно, все написанные на доске числа имеют одинаковый остаток при делении на 3, и их сумма делится на 3. Значит, эта сумма не может быть равна 2021.

в) Заметим, что сумма цифр любого трёхзначного числа не превосходит 27, а сумма цифр числа, не превосходящего 27, может быть равна 2 только для чисел 2, 11 и 20. Следовательно, второе число равно 11 или 20, а нам требуется найти количество трёхзначных чисел, сумма цифр каждого из которых равна 11 или 20.

Найдём количество трёхзначных чисел, сумма цифр каждого из которых равна 11. Если первая цифра числа равна 1, то таких чисел девять: 119, 128, 137, ..., 191. Если первая цифра числа равна 2, то таких чисел десять: 209, 218, 227, ..., 290. Если первая цифра числа равна 3, то таких чисел девять: 308, 317, 326, ..., 380. Рассуждая аналогично, получаем, что если первая цифра числа равна 4, 5, ..., 9, то таких чисел 8, 7, ..., 3 соответственно. Таким образом, количество трёхзначных чисел, сумма цифр каждого из которых равна 11, равно

$$9+10+9+8+\ldots+3=61.$$

Найдём количество трёхзначных чисел, сумма цифр каждого из которых равна 20. Если первая цифра числа равна 1, то таких чисел нет. Если первая цифра числа равна 2, то такое число одно: 299. Если первая цифра числа равна 3, то таких чисел два: 389, 398. Рассуждая аналогично, получаем, что если первая цифра числа равна 4, 5, ..., 9, то таких чисел 3, 4, ..., 8 соответственно. Таким образом, количество трёхзначных чисел, сумма цифр каждого из которых равна 20, равно

$$1+2+3 ... +8=36.$$

Следовательно, искомое количество троек равно $61+36=97$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 97.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Вариант 17

12 а) Решите уравнение $5\sin x-4\sin^3 x=2\sin 2x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$4\sin^3 x+4\sin x\cos x-5\sin x=0;\ \sin x\cdot\left(4\sin^2 x+4\cos x-5\right)=0;$$

$$\sin x\cdot\left(4\cos^2 x-4\cos x+1\right)=0;\ \sin x\cdot(2\cos x-1)^2=0.$$

Значит, $\sin x=0$, откуда $x=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, или $\cos x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

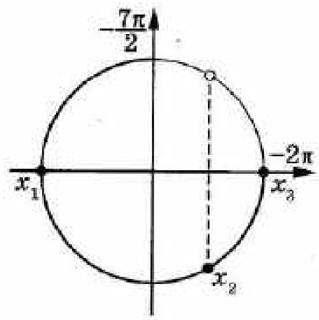
б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

Получим:

$x_1 = -\frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = -3\pi$;

$x_2 = -2\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{3}$;

$x_3 = -2\pi$.



Ответ: а) $\pi k,\ k \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$;

б) $-3\pi;\ -\frac{7\pi}{3};\ -2\pi$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решением линейных неравенств и т. п.

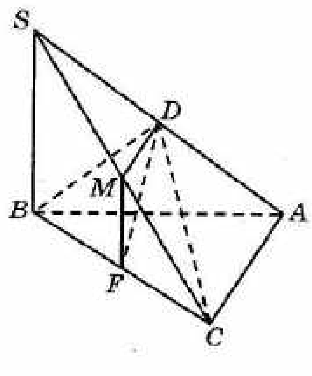
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

13 Основание пирамиды $SABC$ — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. Высота пирамиды проходит через точку B.

а) Докажите, что середина ребра SA равноудалена от вершин B и C.

б) Найдите угол между плоскостью SBC и прямой, проходящей через середины рёбер BC и SA, если известно, что $BS = AC$.

Решение.



а) Пусть D — середина ребра SA. По теореме о трёх перпендикулярах прямые SC и AC перпендикулярны. Медиана CD прямоугольного треугольника ACS равна половине гипотенузы AS. Медиана BD прямоугольного треугольника ASB также равна половине гипотенузы AS. Значит, $BD = CD$.

б) Пусть F — середина ребра BC, M — середина ребра SC, тогда FM — средняя линия треугольника CBS. Значит, $FM = \frac{1}{2}BS$, прямые FM и BS параллельны, то есть FM — перпендикуляр к плоскости основания пирамиды, поэтому отрезок FM перпендикулярен отрезку AC.

DM — средняя линия треугольника ASC, поэтому $DM = \frac{1}{2}AC$, а прямые DM и AC параллельны, значит отрезок DM перпендикулярен отрезкам FM и BC, следовательно DM — перпендикуляр к плоскости грани CBS.

Таким образом, угол DFM — это угол между прямой DF и плоскостью грани CBS.

По условию задачи $BS = AC$, поэтому $MF = DM$, значит,

$$\mathrm{tg}\angle DFM = \frac{DM}{FM} = 1.$$

Следовательно, $\angle DFM = 45°$.

Ответ: б) $45°$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

14 Решите неравенство $\log_2^2(x^4) - 4\log_{0,25}(x^2) \geq 12$.

Решение.

$4\log_2^2(x^2) + 2\log_2(x^2) \geq 12$; $2\log_2^2(x^2) + \log_2(x^2) - 6 \geq 0$;

$(\log_2(x^2) + 2)\cdot(2\log_2(x^2) - 3) \geq 0$,

откуда $\log_2(x^2) \leq -2$ или $\log_2(x^2) \geq \frac{3}{2}$.

Значит, $x^2 \leq \frac{1}{4}$ или $x^2 \geq \sqrt{8}$,

откуда $x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$ или $x \in (-\infty; -\sqrt[4]{8}] \cup [\sqrt[4]{8}; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -\sqrt[4]{8}]$; $[-0,5; 0)$; $(0; 0,5]$; $[\sqrt[4]{8}; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек $-\sqrt[4]{8}$, $-0{,}5$, $0{,}5$ и/или $\sqrt[4]{8}$ ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 2x^2 + 5x + 10$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через 12 лет суммарная прибыль может составить не менее 744 млн рублей при некотором значении x?

Решение.

Прибыль (в млн рублей) за один год вычисляется как

$$px - (2x^2 + 5x + 10) = -2x^2 + (p-5)x - 10.$$

Это выражение является квадратным трёхчленом и достигает своего наибольшего значения при $x = \frac{p-5}{4}$.

Наибольшее значение равно $\frac{(p-5)^2}{8} - 10$.

Значит, через 12 лет прибыль составит не менее 744 млн рублей при

$$12 \cdot \left(\frac{(p-5)^2}{8} - 10\right) \geq 744;$$

$$\frac{(p-5)^2}{8} - 10 \geq 62; \quad (p-5)^2 \geq 576; \quad (p+19)(p-29) \geq 0,$$

то есть при $p \geq 29$, поскольку цена продукции не может быть отрицательной. Таким образом, наименьшее значение $p = 29$.

Ответ: 29.

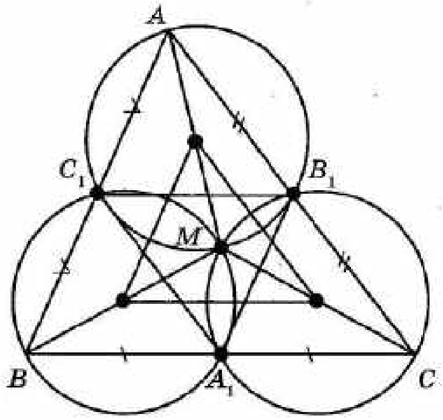
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон соответственно BC, AC и AB остроугольного треугольника ABC.

а) Докажите, что окружности, описанные около треугольников A_1CB_1, A_1BC_1 и B_1AC_1, пересекаются в одной точке.

б) Известно, что $AB = AC = 13$ и $BC = 10$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершины которого — центры окружностей, описанных около треугольников A_1CB_1, A_1BC_1 и B_1AC_1.

Решение.



а) Пусть α, β, γ — углы при вершинах A, B и C треугольника ABC соответственно, M — отличная от A_1 точка пересечения окружностей, описанных около треугольников A_1CB_1 и A_1BC_1.

Четырёхугольник A_1BC_1M вписан в окружность, поэтому

$\angle A_1MC_1 = 180° - \angle A_1BC_1 = 180° - \beta$.

Аналогично $\angle A_1MB_1 = 180° - \gamma$. Значит,

$$\angle B_1MC_1 = 360° - (\angle A_1MC_1 + \angle A_1MB_1) =$$
$$= 360° - (180° - \beta + 180° - \gamma) = \beta + \gamma = 180° - \alpha,$$

поэтому четырёхугольник B_1AC_1M — вписанный. Следовательно, точка M лежит на описанной окружности треугольника B_1AC_1.

б) Отрезок AM — диаметр окружности, описанной около равнобедренного треугольника B_1AC_1, поэтому отрезок MB_1 перпендикулярен отрезку AC. Значит, CM — диаметр окружности, описанной около треугольника A_1CB_1. Аналогично BM — диаметр окружности, описанной около треугольника A_1BC_1. Центры этих трёх окружностей — середины отрезков AM, BM и CM. По теореме о средней линии треугольника стороны треугольника с вершинами в центрах трёх указанных окружностей соответственно параллельны сторонам треугольника ABC. Значит, треугольник с вершинами в центрах этих окружностей подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{1}{2}$.

Пусть r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC. Тогда

$$r = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AB + AC + BC} = \frac{BC \cdot AA_1}{13 + 13 + 10} = \frac{10 \cdot 12}{36} = \frac{10}{3}.$$

Следовательно, искомый радиус равен $\frac{r}{2} = \frac{5}{3}$.

Ответ: б) $\frac{5}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Окончание табл.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(x-2a+2)^2+(y+a-2)^2=a+\dfrac{5}{2},\\ x+y=1-a\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Выразим из второго уравнения $y=1-a-x$ и подставим в первое:

$$x^2-2(2a-2)x+(2a-2)^2+(-x-a+1+a-2)^2=a+\frac{5}{2},$$

$$x^2-4ax+4x+4a^2-8a+4+x^2+2x+1=a+\frac{5}{2},$$

$$2x^2-2x(2a-3)+4a^2-9a+\frac{5}{2}=0.$$

Поскольку y однозначно выражается через x, каждому корню этого уравнения будет соответствовать единственное решение исходной системы. Значит, система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда дискриминант равен нулю:

$$\frac{D}{4}=(2a-3)^2-2\left(4a^2-9a+\frac{5}{2}\right)=-4a^2+6a+4=-2\left(2a^2-3a-2\right)=0.$$

Получаем, что $a=-\dfrac{1}{2}$ или $a=2$.

Ответ: $-\dfrac{1}{2}$; 2.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены оба верных значения параметра, но решение недостаточно обосновано	3

Окончание табл.

Содержание критерия	Баллы
При верном ходе рассуждений решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу	2
Задача сведена к исследованию квадратного уравнения с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

18 Для действительного числа x обозначим через $[x]$ наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, $\left[\frac{11}{4}\right]=2$, так как $2\le\frac{11}{4}<3$.

а) Существует ли такое натуральное число n, что $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{7}\right]=n$?

б) Существует ли такое натуральное число n, что $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]=n+2$?

в) Сколько существует различных натуральных n, для которых

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{9}\right]+\left[\frac{n}{17}\right]=n+1945\,?$$

Решение.

а) **Нет**. Действительно, $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{7}\right]\le\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\frac{n}{7}=\frac{25}{28}n<n$.

б) **Да**. При $n=24$ имеем $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]=12+8+6=26=n+2$.

в) Пусть натуральное число n при делении с остатком на 2, 3, 9 и 17 даёт в остатке p, q, r и s соответственно. Тогда

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{9}\right]+\left[\frac{n}{17}\right]=\frac{n-p}{2}+\frac{n-q}{3}+\frac{n-r}{9}+\frac{n-s}{17}=\frac{307n-153p-102q-34r-18s}{306}.$$

Следовательно, равенство $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{9}\right]+\left[\frac{n}{17}\right]=n+1945$ имеет место тогда и только тогда, когда $\frac{307n-153p-102q-34r-18s}{306}=n+1945$, или, что то же самое, когда $n=153p+102q+34r+18s+306\cdot1945$.

Остаток p может принимать целые значения 0 или 1, остаток r — от 0 до 8 включительно, остаток s — от 0 до 16 включительно, а остаток q однозначно определяется значением остатка r ($q=0$ при $r=0$, или 3, или 6, $q=1$ при $r=1$, или 4, или 7, $q=2$ при $r=2$, или 5, или 8). Отсюда получаем, что выражение $153p+102q+34r+18s+306\cdot1945$ может принимать не более $2\cdot9\cdot17=306$ различных натуральных значений.

Покажем, что все такие 306 чисел $n=153p+102q+34r+18s+306\cdot1945$, получаемые при подстановке всех допустимых значений p, q, r и s, имеют при делении с остатком на 2, 3, 9 и 17 остатки p, q, r и s соответственно. Действительно, имеем $n = 9\cdot(17p + 11q + 3r + 2s + 34\cdot 1945) + 3(q + 2r) + r$, причём $q + 2r$ всегда делится на 3. Значит, такое число n при делении с остатком на 3 и 9 даёт в остатке q и r соответственно. Аналогично имеем $n = 2\cdot(76p + 51q + 17r + 9s + 153\cdot 1945) + p$. Следовательно, такое число при делении с остатком на 2 даёт в остатке p. Наконец, имеем $n = 17\cdot(9p + 6q + 2r + s + 18\cdot 1945) + s$. Значит, такое число n при делении с остатком на 17 даёт в остатке s.

Все такие 306 чисел попарно различны, так как при делении с остатком на числа 2, 3, 9 и 17 дают попарно разные наборы остатков. Следовательно, искомых чисел n ровно 306.

Ответ: а) нет; б) да; в) 306.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пунктах *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пунктах *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Вариант 21

12 а) Решите уравнение $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin 2x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

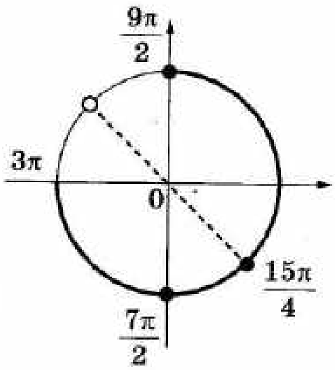
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2\cos^2 x + 2\sin x\cdot\cos x = 0;\ \cos x\cdot(\sin x + \cos x) = 0.$$

Значит, или $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $\sin x = -\cos x$; $\operatorname{tg} x = -1$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.



Получим числа: $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{15\pi}{4}$; $\frac{9\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

б) $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{15\pi}{4}$; $\frac{9\pi}{2}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решением линейных неравенств и т. п.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

13 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания AB равна 2, а боковое ребро SA равно 8. Точка M — середина ребра AB. Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит точки M и D. Прямая SC пересекает плоскость α в точке K.

а) Докажите, что $KM = KD$.

б) Найдите объём пирамиды $CDKM$.

Решение.

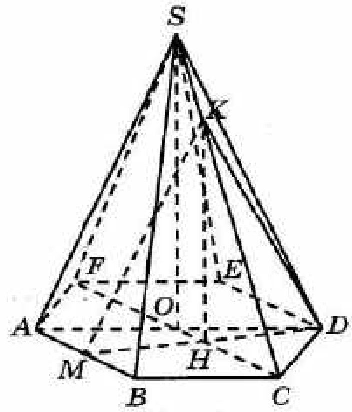


Рис. 1

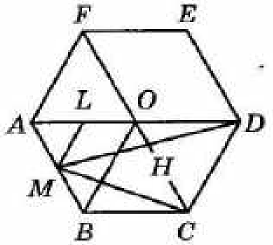


Рис. 2

а) Пусть прямые CF и MD пересекаются в точке H (рис. 1), а SO — высота пирамиды $SABCDEF$. Поскольку пирамида $SABCDEF$ правильная, центр правильного шестиугольника $ABCDEF$ совпадает с точкой O. Значит, прямая SO лежит в плоскости SCF. Следовательно, плоскость SCF перпендикулярна плоскости ABC.

Получаем, что прямая KH, являющаяся прямой пересечения плоскостей SCF и α, перпендикулярна плоскости ABC. Значит, отрезок KH является высотой в треугольнике MKD.

Рассмотрим правильный шестиугольник $ABCDEF$ (рис. 2). Прямые AB и CF параллельны, а точка O — середина отрезка AD, следовательно, отрезок OH — средняя линия треугольника ADM и $MH = HD$. Таким образом, отрезок KH является медианой и высотой в треугольнике MKD, значит, этот треугольник равнобедренный и $KM = KD$.

б) В пункте *а* было доказано, что прямая KH перпендикулярна плоскости ABC, следовательно, отрезок KH является высотой пирамиды $CDKM$.

Поскольку отрезок OH является средней линией треугольника ADM,

$$OH = \frac{AM}{2} = \frac{AB}{4} = 0{,}5;\ CH = OC - OH = AB - OH = 1{,}5.$$

В треугольнике SOC имеем:

$$SO=\sqrt{SC^2-OC^2}=\sqrt{64-4}=2\sqrt{15};\ KH=\frac{CH}{OC}\cdot SO=\frac{1{,}5\cdot 2\sqrt{15}}{2}=\frac{3\sqrt{15}}{2}.$$

Пусть точка L — середина отрезка OA. Тогда средняя линия LM треугольника AOB параллельна прямой OB, а значит, и прямой CD. Следовательно, расстояние от точки M до прямой CD равно расстоянию от точки L до прямой CD и равно $\frac{3}{4}$ расстояния h между прямыми AF и CD.

Площадь треугольника CDM равна

$$S_{CDM}=\frac{CD\cdot\frac{3}{4}h}{2}=\frac{3}{8}\cdot AB\cdot AB\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Объём пирамиды $CDKM$ равен

$$\frac{1}{3}\cdot KH\cdot S_{CDM}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{15}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{5}}{4}.$$

Ответ: б) $\frac{9\sqrt{5}}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

14 Решите неравенство $x^2\log_{64}(3-2x)\ge\log_2(4x^2-12x+9)$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде:

$$\frac{x^2}{6}\cdot\log_2(3-2x)\ge 2\log_2(3-2x);\ (x^2-12)\log_2(3-2x)\ge 0.$$

Заметим, что выражение $\log_2(3-2x)$ определено при $x<1{,}5$, принимает отрицательные значения при $1<x<1{,}5$, равно 0 при $x=1$ и принимает положительные значения при $x<1$.

При $1<x<1{,}5$ значение выражения x^2-12 отрицательно, а значит, любое значение x из этого интервала удовлетворяет неравенству $(x^2-12)\log_2(3-2x)\ge 0$.

При $x<1$ неравенство принимает вид $x^2-12\ge 0$, откуда $x\le -2\sqrt{3}$; $x\ge 2\sqrt{3}$. Учитывая ограничение $x<1{,}5$, получаем $x\le -2\sqrt{3}$.

Таким образом, решение исходного неравенства: $x\le -2\sqrt{3}$; $1\le x<1{,}5$.

Ответ: $(-\infty;\ -2\sqrt{3}]$; $[1;\ 1{,}5)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек $-2\sqrt{3}$ и/или 1, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

15 В июле 2022 года планируется взять кредит на пять лет в размере 1050 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2023, 2024 и 2025 годов долг остаётся равным 1050 тыс. рублей;
- выплаты в 2026 и 2027 годах равны;
- к июлю 2027 года долг будет выплачен полностью.

На сколько рублей последняя выплата будет больше первой?

Решение.

Пусть выплаты с февраля по июнь в 2026 и 2027 годах составляют по x тыс. рублей. В июле 2023, 2024 и 2025 годов долг перед банком не меняется, а ежегодные выплаты составляют по 105 тыс. рублей.

В январе 2026 года долг (в тыс. рублей) равен 1155, а в июле — $1155-x$. В январе 2027 года долг равен $1270{,}5-1{,}1x$, а в июле — $1270{,}5-2{,}1x$. По условию, к июлю 2027 года долг будет выплачен полностью, значит, $1270{,}5-2{,}1x=0$, откуда $x=605$.

Таким образом, первая выплата составляет 105 тыс. рублей, а последняя — 605 тыс. рублей. Последняя выплата больше первой на 500 тыс. рублей.

Ответ: 500 тыс. рублей.

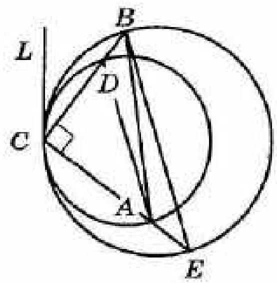
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

16 Две окружности касаются внутренним образом в точке C. Вершины A и B равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежат на меньшей и большей окружностях соответственно. Прямая AC вторично пересекает бóльшую окружность в точке E, а прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и BE параллельны.

б) Найдите AC, если радиусы окружностей равны 3 и 4.

Решение.



а) Пусть CL — общая касательная двух окружностей, причём точки L и B лежат по одну сторону от прямой AC. Тогда по теореме об угле между касательной и хордой

$$\angle CAD = \angle LCB = \angle CEB.$$

Значит, прямые AD и BE параллельны, поскольку соответственные углы CAD и CEB при пересечении этих прямых прямой AE равны.

б) Поскольку угол ACB прямой, AD и BE — диаметры меньшей и большей окружностей соответственно.

Прямоугольные треугольники ACD и ECB подобны по острому углу ($\angle CAD = \angle CEB$) с коэффициентом подобия $\frac{AD}{BE} = \frac{3}{4}$.

Пусть $AC = BC = x$, тогда $CD = \frac{3}{4}BC = \frac{3x}{4}$.

В прямоугольном треугольнике ACD:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2;\ 36 = x^2 + \frac{9x^2}{16},$$

откуда $x = \frac{24}{5}$.

Ответ: б) 4,8.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Окончание табл.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{16-y^2}=\sqrt{16-a^2x^2},\\ x^2+y^2=8x+4y\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение.

Заметим, что при $|y|>4$ левая часть первого уравнения системы не определена, а при $-4\le y\le 4$ первое уравнение системы принимает вид:

$$16-y^2=16-a^2x^2;\ y^2=a^2x^2,$$

откуда $y=ax$ или $y=-ax$.

При $y=ax$ второе уравнение системы принимает вид:

$$x^2+a^2x^2=8x+4ax;\ (a^2+1)x^2=(4a+8)x,$$

откуда $x=0$ или $x=\frac{4a+8}{a^2+1}$. В этих случаях получаем $y=0$ и $y=\frac{4a^2+8a}{a^2+1}$ соответственно.

При $y=-ax$ второе уравнение системы принимает вид:

$$x^2+a^2x^2=8x-4ax;\ (a^2+1)x^2=(8-4a)x,$$

откуда $x=0$ или $x=\frac{8-4a}{a^2+1}$. В этих случаях получаем $y=0$ и $y=\frac{4a^2-8a}{a^2+1}$ соответственно.

Таким образом, решениями исходной системы являются пары чисел $(0;0)$, $\left(\frac{4a+8}{a^2+1};\frac{4a^2+8a}{a^2+1}\right)$, $\left(\frac{8-4a}{a^2+1};\frac{4a^2-8a}{a^2+1}\right)$, для которых выполнено условие $-4\le y\le 4$.

Для пары $(0;0)$ условие $-4\le y\le 4$ выполнено.

Для пары $\left(\frac{4a+8}{a^2+1};\frac{4a^2+8a}{a^2+1}\right)$ условие $-4\le y\le 4$ принимает вид:

$$-4\le\frac{4a^2+8a}{a^2+1}\le 4;\ -a^2-1\le a^2+2a\le a^2+1;\ \begin{cases}2a^2+2a+1\ge 0,\\ 2a-1\le 0,\end{cases}$$

откуда $a \le \frac{1}{2}$, поскольку решением неравенства $2a^2+2a+1 \ge 0$ является любое число.

Для пары $\left(\frac{8-4a}{a^2+1}; \frac{4a^2-8a}{a^2+1}\right)$ условие $-4 \le y \le 4$ принимает вид:

$$-4 \le \frac{4a^2-8a}{a^2+1} \le 4;\ -a^2-1 \le a^2-2a \le a^2+1;\ \begin{cases} 2a^2-2a+1 \ge 0, \\ 2a+1 \ge 0, \end{cases}$$

откуда $a \ge -\frac{1}{2}$, поскольку решением неравенства $2a^2-2a+1 \ge 0$ является любое число.

Пары $(0;0)$ и $\left(\frac{4a+8}{a^2+1}; \frac{4a^2+8a}{a^2+1}\right)$ совпадают при $a=-2$.

Пары $(0;0)$ и $\left(\frac{8-4a}{a^2+1}; \frac{4a^2-8a}{a^2+1}\right)$ совпадают при $a=2$.

Пары $\left(\frac{4a+8}{a^2+1}; \frac{4a^2+8a}{a^2+1}\right)$ и $\left(\frac{8-4a}{a^2+1}; \frac{4a^2-8a}{a^2+1}\right)$ совпадают при $a=0$.

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно два различных решения при $a<-2$; $-2<a<-\frac{1}{2}$; $a=0$; $\frac{1}{2}<a<2$; $a>2$.

Ответ: $a<-2$; $-2<a<-\frac{1}{2}$; $a=0$; $\frac{1}{2}<a<2$; $a>2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением/исключением не более двух из пяти точек: $a=-2$, $a=-\frac{1}{2}$, $a=0$, $a=\frac{1}{2}$, $a=2$	3
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением/исключением более двух из пяти точек: $a=-2$, $a=-\frac{1}{2}$, $a=0$, $a=\frac{1}{2}$, $a=2$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения окружности и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

18 На доске было написано несколько различных натуральных чисел. Эти числа разбили на три группы, в каждой из которых оказалось хотя бы одно число. К каждому числу из первой группы приписали справа цифру 3, к каждому числу из второй группы — цифру 7, а числа из третьей группы оставили без изменений.

а) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 8 раз?
б) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 17 раз?
в) В какое наибольшее число раз могла увеличиться сумма всех этих чисел?

Решение.

а) Пусть на доске были написаны числа 1, 8 и 4, из которых получили числа 13, 87 и 4. При этом $1+8+4=13$, $13+87+4=104=8\cdot 13$. Значит, сумма увеличилась в 8 раз.

б) Пусть в первой группе было m чисел, а их сумма равнялась A, во второй группе было n чисел, а их сумма равнялась B, а сумма чисел в третьей группе равнялась C. Тогда сумма чисел была равна $A+B+C$, а стала $10A+3m+10B+7n+C$.

Предположим, что сумма увеличилась в 17 раз. Тогда получаем:

$$10A+3m+10B+7n+C=17A+17B+17C;\ 3m+7n=7A+7B+16C.$$

Это невозможно, поскольку $A\ge m\ge 1$, $B\ge n\ge 1$, $C\ge 1$.

в) Рассмотрим отношение Q получившейся суммы чисел и изначальной:

$$Q=\frac{10A+3m+10B+7n+C}{A+B+C}=10+\frac{3m+7n-9C}{A+B+C}.$$

Если перенести одно число из первой или третьей группы во вторую, то $A+B+C$ не изменится, а $3m+7n-9C$ увеличится. Значит, отношение Q будет наибольшим, если в первой и третьей группах находится по одному числу. Поэтому будем считать, что $m=1$, а общее количество чисел равно $n+2$. Поскольку числа различные, получаем $A+B+C\ge\frac{(n+2)(n+3)}{2}$. Кроме того, $C\ge 1$. Значит,

$$Q=10+\frac{3+7n-9C}{A+B+C}\le 10+\frac{7n-6}{A+B+C}\le 10+\frac{2(7n-6)}{(n+2)(n+3)}.$$

Найдём, при каком значении n выражение $f(n)=\frac{7n-6}{(n+2)(n+3)}$ принимает наибольшее значение. Рассмотрим разность

$$f(n+1)-f(n)=\frac{7n+1}{(n+3)(n+4)}-\frac{7n-6}{(n+2)(n+3)}=$$

$$=\frac{(n+2)(7n+1)-(n+4)(7n-6)}{(n+2)(n+3)(n+4)}=\frac{26-7n}{(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

Значит, $f(n+1)-f(n)>0$ при $n\le 3$ и $f(n+1)-f(n)<0$ при $n\ge 4$. Таким образом, $f(n)$ принимает наибольшее значение при $n=4$. Следовательно,

$$Q\le 10+\frac{2(7n-6)}{(n+2)(n+3)}\le 10+2f(4)=10+\frac{22}{21}=\frac{232}{21}.$$

Покажем, что отношение Q могло равняться $\frac{232}{21}$. Пусть было написано шесть чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, из которых получили числа 1, 23, 37, 47, 57, 67. Тогда сумма чисел была равна 21, а стала 232. Таким образом, $Q=\frac{232}{21}$.

Ответ: а) да; б) нет; в) $\frac{232}{21}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Вариант 27

12 а) Решите уравнение $\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos 2x=\frac{\sin^2 x}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) $\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos 2x=2\sin^2 x$; $\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)=1$.

Возможны два случая:

$$\begin{cases}\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=1,\\ \cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)=1\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=-1,\\ \cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)=-1.\end{cases}$$

В первом случае:

$$\begin{cases}2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\\ 4x+\frac{\pi}{3}=2\pi n;\end{cases} \begin{cases}2x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\\ 4x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\end{cases} \begin{cases}x=-\frac{\pi}{12}+\pi k,\\ x=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n\end{cases}, \text{ где } k\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{Z}.$$

Получаем: $x=-\frac{\pi}{12}+\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

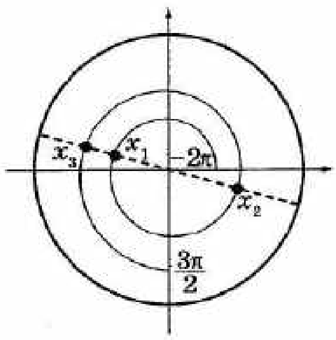
Во втором случае:

$$\begin{cases}2x+\frac{2\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\\ 4x+\frac{\pi}{3}=\pi+2\pi n;\end{cases} \begin{cases}2x=-\frac{7\pi}{6}+2\pi k,\\ 4x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\end{cases} \begin{cases}x=-\frac{7\pi}{12}+\pi k,\\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n\end{cases}, \text{ где } k\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{Z}.$$

Система решений не имеет.

Получили, что $x=-\frac{\pi}{12}+\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности найдём корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.



$$x_1 = -2\pi + \pi - \frac{\pi}{12} = -\frac{13\pi}{12};$$

$$x_2 = -2\pi + 2\pi - \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{12};$$

$$x_1 = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}.$$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{12} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

б) $-\frac{13\pi}{12}$; $-\frac{\pi}{12}$; $\frac{11\pi}{12}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решением линейных неравенств и т. п.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания AB равна $2\sqrt{3}$, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах A_1D_1 и DD_1 отмечены соответственно точки K и M так, что $A_1K = KD_1$, а $DM : MD_1 = 2 : 1$.

а) Докажите, что прямые MK и BK перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями BMK и BCC_1.

Решение.

а) Из прямоугольных треугольников KMD_1, BKB_1 и BMD соответственно получаем, что $KM = 2$, $BK = 2\sqrt{6}$ и $BM = 2\sqrt{7}$. Заметим, что $KM^2 + BK^2 = BM^2$. Значит, треугольник BKM прямоугольный, а прямые MK и BK перпендикулярны.

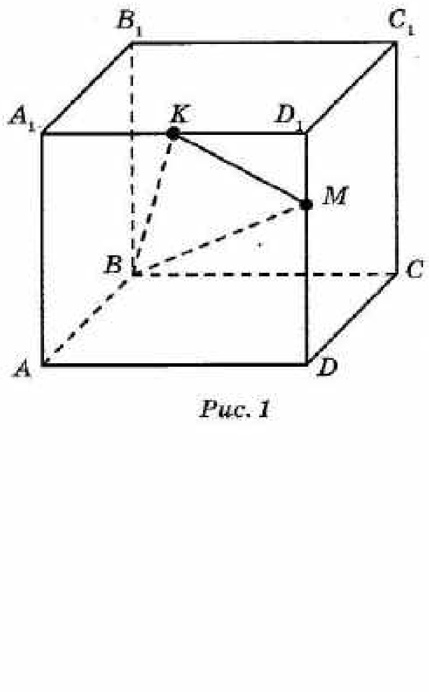


Рис. 1

б) Угол между плоскостями BMK и BCC_1 равен углу между плоскостями BMK и ADD_1.

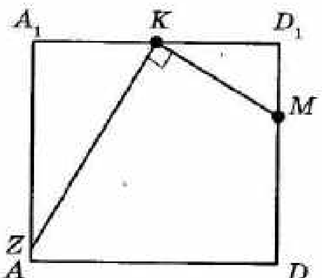


Рис. 2

Плоскости BMK и ADD_1 пересекаются по прямой KM, причём прямые MK и BK перпендикулярны (см. пункт а). Построим прямую KZ в плоскости ADD_1, перпендикулярную прямой KM (рис. 2). Треугольники KMD_1 и ZKA подобны по двум углам.

Значит, $\frac{A_1Z}{A_1K}=\frac{KD_1}{MD_1}$. Откуда $A_1Z=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{1}=3.$

Следовательно, точки A и Z совпадают, а AK перпендикулярно KM.

Получили, что угол AKB — линейный угол двугранного угла между плоскостями BMK и ADD_1.

Из прямоугольного треугольника ABK получаем, что $tg\angle AKB=\frac{AB}{AK}=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=1$, а значит, угол между плоскостями BMK и BCC_1 равен 45°.

Ответ: б) 45°.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

14 Решите неравенство $\frac{6\cdot 5^x-11}{25^{x+0,5}-6\cdot 5^x+1}\geq 0,25$.

Решение.

Пусть $t=5^x$, тогда неравенство примет вид: $\frac{6t-11}{5t^2-6t+1}-\frac{1}{4}\geq 0$.

$$\frac{24t-44-5t^2+6t-1}{4(5t^2-6t+1)}\geq 0;\ \frac{t^2-6t+9}{5t^2-6t+1}\leq 0;\ \frac{(t-3)^2}{(t-1)(5t-1)}\leq 0,$$

значит $t\in\left(\frac{1}{5};1\right)$ или $t=3$.

Получаем: $\frac{1}{5} < 5^x < 1$, откуда $x \in (-1; 0)$, или $5^x = 3$, откуда $x = \log_5 3$.

Ответ: $(-1; 0)$; $\log_5 3$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки $\log_5 3$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

15 Александр хочет купить пакет акций быстрорастущей компании. В начале года у Александра не было денег на покупку акций, а пакет стоил 100 000 рублей. В середине каждого месяца Александр откладывает на покупку пакета акций одну и ту же сумму, а в конце месяца пакет дорожает, но не более чем на 30 %. Какую наименьшую сумму нужно откладывать Александру каждый месяц, чтобы через некоторое время купить желаемый пакет акций?

Решение.

Пусть Александр откладывает в середине каждого месяца x рублей. К середине n-го месяца у Александра скопится nx рублей, а акции будут стоить не более $100\,000 \cdot 1{,}3^{n-1}$ рублей. Для того чтобы Александр смог купить пакет акций в этом месяце, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $x \geq \frac{100\,000 \cdot 1{,}3^{n-1}}{n}$. Положим $a_n = \frac{100\,000 \cdot 1{,}3^{n-1}}{n}$. Для того чтобы Александр смог через некоторое время купить пакет акций, необходимо и достаточно откладывать сумму большую либо равную наименьшему из чисел a_n. Сравним два последовательных таких числа. Для этого вычислим их отношение: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1{,}3 \cdot n}{n+1} = \frac{13n}{10n+10}$. Отсюда получаем, что при $n < 4$ выполнено $a_{n+1} \leq a_n$, а при $n \geq 4$ выполнено $a_{n+1} \geq a_n$.

Значит, наименьшим из чисел a_n будет число $a_4 = \frac{100\,000 \cdot 1{,}3^3}{4} = 54\,925$.

Поэтому наименьшая сумма, которую нужно откладывать Александру, равна 54 925 рублей.

Ответ: 54 925 рублей.

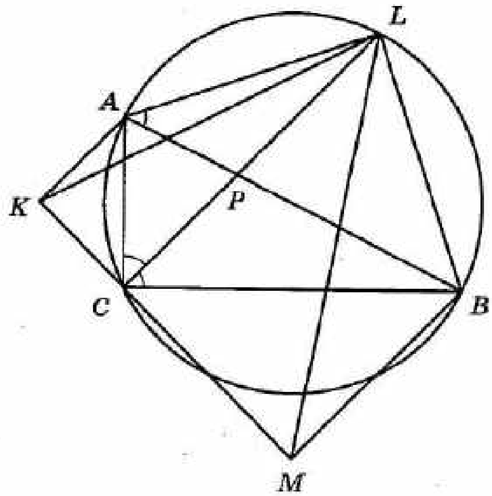
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

16 На сторонах AC, AB и BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C вне треугольника ABC построены равнобедренные прямоугольные треугольники AKC, ALB и BMC с прямыми углами K, L и M соответственно.

а) Докажите, что LC — высота треугольника KLM.

б) Найдите площадь треугольника KLM, если $LC = 4$.

Решение.



а) По условию $\angle ACB + \angle BLA = 90° + 90° = 180°$. Значит, четырёхугольник $LACB$ вписанный.

Хорды AL и LB описанной около четырёхугольника $LACB$ окружности равны. Значит, равны между собой стягиваемые этими хордами дуги, а также опирающиеся на эти дуги вписанные углы ACL и LCB. Тогда $\angle ACL = \angle LCB = 45°$.

По условию $\angle KCA = \angle MCB = 45°$. Следовательно, $\angle KCL = \angle KCA + \angle ACL = 90°$ и $\angle MCL = \angle MCB + \angle LCB = 90°$, а значит, LC — высота треугольника KLM.

б) Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ и $CL = d$, P — точка пересечения CL и AB. Тогда по доказанному в пункте а) CP — биссектриса треугольника ABC. По свойству биссектрисы $AP : PB = AC : CB = b : a$, $AP + PB = AB = c$. Отсюда $AP = \frac{bc}{a+b}$ и $PB = \frac{ac}{a+b}$.

Поскольку $\angle ACL = \angle BAL = 45°$, получаем, что треугольники ACL и PAL подобны по двум углам. Отсюда $\frac{AC}{PA} = \frac{CL}{AL}$, $b : \frac{bc}{a+b} = d : \frac{c}{\sqrt{2}}$ и $d = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

Площадь треугольника KLM равна половине произведения его высоты $LC = d$ на основание $KM = KC + CM = \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} = d$. Следовательно, искомая площадь равна $\frac{d^2}{2} = 8$.

Ответ: б) 8.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Найдите, при каких неотрицательных значениях a функция $f(x)=3ax^4-8x^3+3x^2-7$ на отрезке $[-1;1]$ имеет ровно одну точку минимума.

Решение.

Найдём производную функции: $f'(x)=12ax^3-24x^2+6x$.

$$12ax^3-24x^2+6x=0;\ 6x(2ax^2-4x+1)=0.$$

В точке $x=0$ производная меняет знак с «−» на «+», поэтому точка $x=0$ является точкой минимума.

Функция $f(x)=3ax^4-8x^3+3x^2-7$ может иметь ещё точку минимума, если уравнение $2ax^2-4x+1=0$ имеет два корня, а значит, при $a<2$.

а) При $a=0$ уравнение имеет два корня: $x=0$ и $x=\frac{1}{4}$.

Точка $x=\frac{1}{4}$ является точкой максимума.

б) При $a\in(0;2)$ уравнение имеет три различных корня:

$$x_1=0,\ x_2=\frac{2-\sqrt{4-2a}}{2a}\ \text{и}\ x_3=\frac{2+\sqrt{4-2a}}{2a},\ \text{где}\ x_1<x_2<x_3;$$

точка x_2 является точкой максимума, а точки x_1 и x_3 — точками минимума. Точка x_3 лежит на отрезке $[-1;1]$, если $\frac{2+\sqrt{4-2a}}{2a}\le 1$, а это выполнено при всех $a\ge 1{,}5$.

Получили: функция $f(x)=3ax^4-8x^3+3x^2-7$ на отрезке $[-1;1]$ имеет одну точку минимума при $a\in[0;1{,}5)$ и $a\ge 2$.

Ответ: $[0;1{,}5)$; $[2;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением/исключением точек $a=1{,}5$ и/или $a=2$	3
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только исключением точки $a=0$, а также, может быть, включением/исключением точек $a=1{,}5$ и/или $a=2$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Верно найдены все три граничные точки множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

18 Для каждого натурального числа n обозначим через $n!$ произведение первых n натуральных чисел ($1!=1$).

а) Существует ли такое натуральное число n, что десятичная запись числа $n!$ оканчивается ровно 9 нулями?

б) Существует ли такое натуральное число n, что десятичная запись числа $n!$ оканчивается ровно 23 нулями?

в) Сколько существует натуральных чисел n, меньших 100, для каждого из которых десятичная запись числа $n!\cdot(100-n)!$ оканчивается ровно 23 нулями?

Решение.

а) Для $n=40$ получаем $n!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot40=p\cdot q$, где число p — это произведение всех кратных 5 натуральных чисел от 1 до 40, а q — это произведение всех не кратных 5 натуральных чисел от 1 до 40. Тогда число $p=5\cdot10\cdot\ldots\cdot40=5^9\cdot(2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8)$ делится на 5^9, но не делится на 5^{10}, а число q делится на $16\cdot32=2^9$, но не делится на 5. Значит, число $n!$ делится на 10^9, но не делится на 10^{10}, и, следовательно, его десятичная запись оканчивается ровно 9 нулями.

б) Для $n=99$ получаем $n!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot99=p\cdot q$, где число p — это произведение всех кратных 5 натуральных чисел от 1 до 99, а q — это произведение всех не кратных 5 натуральных чисел от 1 до 99.

Тогда число $p=5\cdot10\cdot\ldots\cdot95=5^{19}\cdot(1\cdot2\cdot\ldots\cdot19)=5^{22}\cdot r$, где число r не делится на 5. Следовательно, число p делится на 5^{22}, но не делится на 5^{23}. При этом число q делится на $4\cdot16\cdot32\cdot64\cdot96=2^{22}\cdot3$, но не делится на 5. Значит, число $n!$ делится на 10^{22}, но не делится на 10^{23}, и, следовательно, его десятичная запись оканчивается ровно 22 нулями. Поэтому десятичная запись числа $n!$ при $n\le99$ не может оканчиваться ровно 23 нулями, а при $n\ge100$ число делится на $100!=99!\cdot100$ и, следовательно, десятичная запись числа $n!$ оканчивается более чем 23 нулями. Следовательно, таких чисел не бывает.

в) Для каждого действительного числа x обозначим через $[x]$ наибольшее целое число, не превосходящее x. Тогда для любого натурального числа m и любого простого числа p среди чисел 1, 2, ..., m найдётся ровно $\left[\frac{m}{p}\right]$ чисел, кратных p, и $\left[\frac{m}{p^2}\right]$ чисел, кратных p^2.

Поскольку при $1 \le m < 100$ ни одно из чисел 1, 2, ..., m не кратно $125 = 5^3$, то получаем, что число $m! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m$ делится на $5^{\left[\frac{m}{5}\right]+\left[\frac{m}{5^2}\right]}$ и на $2^{\left[\frac{m}{2}\right]+\left[\frac{m}{2^2}\right]}$, но не делится на $5^{\left[\frac{m}{5}\right]+\left[\frac{m}{5^2}\right]+1}$.

Для любого натурального числа n, меньшего 100, получаем: $1 \le 100 - n < 100$, $\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{5^2}\right] \le \left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2^2}\right]$ и $\left[\frac{100-n}{5}\right]+\left[\frac{100-n}{5^2}\right] \le \left[\frac{100-n}{2}\right]+\left[\frac{100-n}{2^2}\right]$.

Значит, для каждого такого n десятичная запись числа $n! \cdot (100-n)!$ оканчивается ровно $k = \left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{5^2}\right]+\left[\frac{100-n}{5}\right]+\left[\frac{100-n}{5^2}\right]$ нулями.

Число $\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{100-n}{5}\right] = \left[\frac{n}{5}\right]+\left[20-\frac{n}{5}\right]$ равно 20 при n, кратных 5, и равно 19 при n, не кратных 5.

Число $\left[\frac{n}{5^2}\right]+\left[\frac{100-n}{5^2}\right] = \left[\frac{n}{5^2}\right]+\left[4-\frac{n}{5^2}\right]$ равно 4 при n, кратных 25, и равно 3 при n, не кратных 25.

Значит, для числа $k = \left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{100-n}{5}\right]+\left[\frac{n}{5^2}\right]+\left[\frac{100-n}{5^2}\right]$ получили:

$k = 24$ при n, кратных 25,
$k = 23$ при n, кратных 5, но не кратных 25,
$k = 22$ при n, не кратных 5.

Следовательно, натуральное число n, меньшее 100, будет искомым тогда и только тогда, когда оно кратно 5, но не кратно 25.

Значит, существует ровно 16 искомых натуральных чисел.

Ответ: а) да; б) нет; в) 16.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пунктах *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пунктах *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Вариант 31

12 а) Решите уравнение $\cos 2x-\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+1=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi;\ -\frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

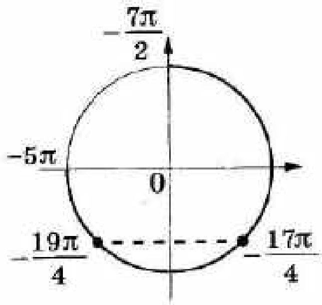
$$1-2\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x+1=0;\ \ (2\sin x+\sqrt{2})(\sin x-\sqrt{2})=0.$$

Значит, $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

Уравнение $\sin x=\sqrt{2}$ корней не имеет.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi;-\frac{7\pi}{2}\right]$.

Получим числа $-\frac{19\pi}{4}$, $-\frac{17\pi}{4}$.



Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{3\pi}{4}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$;

б) $-\frac{19\pi}{4}$, $-\frac{17\pi}{4}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решением линейных неравенств и т. п.

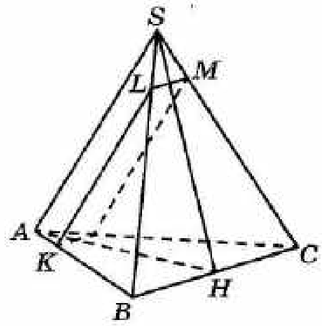
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

13 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK:KB=SM:MC=1:5$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой BC.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA.

б) Найдите угол между плоскостями α и SBC.

Решение.



а) Пусть плоскость α пересекает ребро SB в точке L. Поскольку прямая BC параллельна плоскости α, прямые LM и BC параллельны, а значит,

$$SL : LB = SM : MC = AK : KB.$$

Следовательно, прямые KL и SA параллельны. Таким образом, плоскость α, содержащая прямую KL, параллельна прямой SA.

б) Пусть точка H — середина ребра BC. Тогда медианы AH и SH треугольников ABC и SBC соответственно являются их высотами, а значит, плоскость ASH перпендикулярна прямой BC.

Следовательно, плоскость ASH перпендикулярна плоскости α, параллельной прямой BC, и плоскости SBC, содержащей прямую BC.

Поскольку плоскость α параллельна прямой SA, лежащей в плоскости ASH, искомый угол равен углу между прямой SA и плоскостью SBC.

Таким образом, угол между плоскостями α и SBC равен углу ASH.

В треугольнике ASH имеем:

$$AS = 7,\ AH = 3\sqrt{3},\ SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{SB^2 - \frac{BC^2}{4}} = 2\sqrt{10}.$$

По теореме косинусов

$$\cos\angle ASH = \frac{SA^2 + SH^2 - AH^2}{2SA \cdot SH} = \frac{49 + 40 - 27}{2 \cdot 7 \cdot 2\sqrt{10}} = \frac{31\sqrt{10}}{140}.$$

Ответ: б) $\arccos\frac{31\sqrt{10}}{140}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

14 Решите неравенство $\log_{0,5}(12-6x) \ge \log_{0,5}(x^2-6x+8)+\log_{0,5}(x+3)$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде:

$$\log_{0,5}(6(2-x)) \ge \log_{0,5}((4-x)(2-x))+\log_{0,5}(x+3);$$

$$\log_{0,5}6+\log_{0,5}(2-x) \ge \log_{0,5}(4-x)+\log_{0,5}(2-x)+\log_{0,5}(x+3).$$

Неравенство определено при $-3 < x < 2$, поэтому при $-3 < x < 2$ неравенство принимает вид:

$$6 \le (4-x)(x+3);\ 6 \le 12+x-x^2;\ x^2-x-6 \le 0,$$

откуда $-2 \le x \le 3$. Учитывая ограничение $-3 < x < 2$, получаем: $-2 \le x < 2$.

Ответ: $[-2;\ 2)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки -2, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

15 15 января планируется взять кредит в банке на некоторый срок (целое число месяцев). Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20 % больше суммы, взятой в кредит? (Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся.)

Решение.

Пусть сумма кредита равна S, а кредит планируется взять на n месяцев. По условию, долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S;\ \frac{S(n-1)}{n};\ \frac{2S}{n};\ \frac{S}{n};\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 1 %, значит, последовательность размеров долга на 1-е число каждого месяца такова:

$$1{,}01S;\ \frac{1{,}01S(n-1)}{n};\ \ldots;\ \frac{2{,}02S}{n};\ \frac{1{,}01S}{n}.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$0{,}01S+\frac{S}{n};\ \frac{0{,}01S(n-1)}{n}+\frac{S}{n};\ \ldots;\ \frac{0{,}02S}{n}+\frac{S}{n};\ \frac{0{,}01S}{n}+\frac{S}{n}.$$

Всего следует выплатить

$$S+0{,}01S\left(\frac{n}{n}+\frac{n-1}{n}+\ldots+\frac{2}{n}+\frac{1}{n}\right)=S\left(1+\frac{0{,}01(n+1)}{2}\right).$$

Общая сумма выплат на 20 % больше суммы, взятой в кредит, поэтому

$$\frac{0{,}01(n+1)}{2}=0{,}2;\ n=39.$$

Ответ: 39.

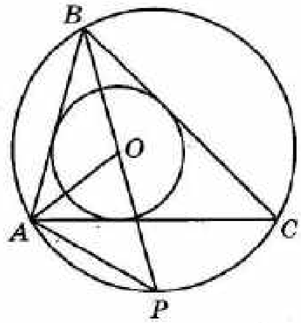
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

16 Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая BO вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P.

а) Докажите, что $\angle POA=\angle PAO$.

б) Найдите площадь треугольника APO, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 6, $\angle BAC=75°$, $\angle ABC=60°$.

Решение.



а) Поскольку точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности, лучи AO и BO являются биссектрисами углов треугольника ABC. Угол POA является внешним углом треугольника AOB. Следовательно,

$$\angle POA=\angle BAO+\angle ABO=\frac{1}{2}\angle BAC+\frac{1}{2}\angle ABC.$$

Углы PAC и PBC равны, поскольку опираются на одну и ту же дугу окружности, описанной около треугольника ABC, поэтому

$$\angle PAO=\angle PAC+\angle OAC=\angle PBC+\angle OAC=\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle BAC.$$

Таким образом, $\angle POA=\angle PAO$.

б) Пусть $R=6$ — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Поскольку $\angle POA=\angle PAO$, треугольник APO равнобедренный, следовательно,

$$OP=AP=2R\sin\angle ABP=2R\sin 30°=6.$$

Таким образом, площадь треугольника APO равна

$$\frac{AP\cdot OP\cdot\sin\angle APO}{2}=\frac{AP^2\cdot\sin\angle ACB}{2}=\frac{AP^2\cdot\sin 45^\circ}{2}=9\sqrt{2}.$$

Ответ: б) $9\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Корнями исходного уравнения являются корни уравнения $|3x|-2x-2-a=0$, для которых выполнено условие $x^2-2x-a\neq 0$.

При $x\leq 0$ уравнение $|3x|-2x-2-a=0$ принимает вид $-5x-2-a=0$ и задаёт на плоскости Oxa луч l_1 с началом в точке $(0;-2)$. При $x\geq 0$ уравнение $|3x|-2x-2-a=0$ принимает вид $x-2-a=0$ и задаёт луч l_2 с началом в точке $(0;-2)$. Значит, уравнение $|3x|-2x-2-a=0$ имеет два корня при $a>-2$, имеет один корень при $a=-2$ и не имеет корней при $a<-2$.

Уравнение $x^2-2x-a=0$ задаёт параболу $a=x^2-2x$.

Координаты точек пересечения параболы $a=x^2-2x$ с лучом l_1 являются решениями системы:

$$\begin{cases}a=x^2-2x,\\ a=-5x-2,\\ x\leq 0;\end{cases}\quad \begin{cases}-5x-2=x^2-2x,\\ a=-5x-2,\\ x\leq 0;\end{cases}\quad \begin{cases}(x+1)(x+2)=0,\\ a=-5x-2,\\ x\leq 0.\end{cases}$$

Значит, парабола $a=x^2-2x$ пересекается с лучом l_1 в точках $(-1;3)$ и $(-2;8)$.

Координаты точек пересечения параболы $a=x^2-2x$ с лучом l_2 являются решениями системы:

$$\begin{cases} a = x^2 - 2x, \\ a = x - 2, \\ x \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2 = x^2 - 2x, \\ a = x - 2, \\ x \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-1)(x-2) = 0, \\ a = x - 2, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Значит, парабола $a = x^2 - 2x$ пересекается с лучом l_2 в точках $(1; -1)$ и $(2; 0)$.

Следовательно, условие $x^2 - 2x - a \neq 0$ выполнено для корней уравнения $|3x| - 2x - 2 - a = 0$ при всех a, кроме $a = -1$, $a = 0$, $a = 3$ и $a = 8$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два корня при $-2 < a < -1$; $-1 < a < 0$; $0 < a < 3$; $3 < a < 8$; $a > 8$.

Ответ: $-2 < a < -1$; $-1 < a < 0$; $0 < a < 3$; $3 < a < 8$; $a > 8$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точки $a = -2$	3
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения, и получено или множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a = 8$, $a = 3$ и/или $a = -2$, или множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a = 0$, $a = -1$ и/или $a = -2$, **ИЛИ** получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения параболы и лучей (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

18 В ящике лежит 76 фруктов, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два фрукта различной массы, а средняя масса всех фруктов равна 100 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых меньше 100 г, равна 85 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых больше 100 г, равна 124 г.

а) Могло ли в ящике оказаться поровну фруктов массой меньше 100 г и фруктов массой больше 100 г?

б) Могло ли в ящике оказаться меньше 8 фруктов, масса каждого из которых равна 100 г?

в) Какую наибольшую массу может иметь фрукт в этом ящике?

Решение.

а) Пусть в ящике k фруктов массой меньше 100 г, k фруктов массой больше 100 г и $(76 - 2k)$ фруктов массой ровно 100 г. Тогда

$$85k + 124k + 100 \cdot (76 - 2k) = 7600; \ 9k = 0,$$

но все фрукты не могут быть одной массы, значит, в ящике не могло оказаться поровну фруктов массой меньше 100 г и фруктов массой больше 100 г.

б) Пусть в ящике k фруктов массой меньше 100 г, m фруктов массой ровно 100 г и n фруктов массой больше 100 г. Тогда

$$85k + 100m + 124n = 100 \cdot (k + m + n);\ 8n = 5k.$$

Поскольку числа 5 и 8 взаимно просты,

$$k = 8s,\ n = 5t;\ 40s = 40t;\ s = t.$$

Таким образом, $k + n = 8s + 5s = 13s$. Следовательно, количество фруктов с массой, отличной от 100 г, делится на 13, и $13s \le 76$, то есть $s \le 5$ и $k + n \le 65$. Значит,

$$m = 76 - (k + n) \ge 76 - 65 = 11.$$

Следовательно, в ящике не могло оказаться меньше 8 фруктов, масса каждого из которых равна 100 г.

в) Пусть масса самого тяжёлого фрукта равна x г, тогда

$$124n \ge x + 101 \cdot (n - 1);\ x \le 23n + 101.$$

В пункте *б* было показано, что $n = 5s$ и $s \le 5$, значит,

$$n \le 25;\ x \le 23 \cdot 25 + 101;\ x \le 676.$$

Покажем, что масса самого тяжёлого фрукта может быть 676 г. Если в ящике 40 фруктов массой 85 г, 11 фруктов массой 100 г, 24 фрукта массой 101 г и 1 фрукт массой 676 г, то условия задачи выполнены.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 676.

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*