

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень**

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ

Ответ: -0,8

10	-	0	,	8																
----	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Бланк

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

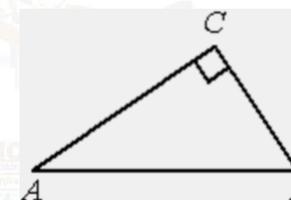
Справочные материалы

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

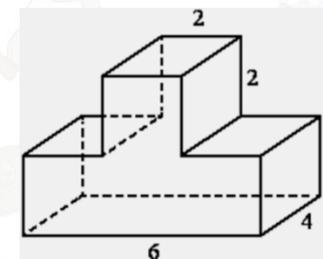
Часть 1

- 1** В треугольнике ABC угол C равен 90° , $BC = 12$, $\cos B = \frac{3}{5}$. Найдите AB .



Ответ: _____.

- 2** Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы – прямые).



Ответ: _____.



- 3 В среднем из 900 садовых насосов, поступивших в продажу, 27 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Ответ: _____.

- 4 Игральную кость бросили два раза. Известно, что шесть очков не выпало ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма очков равна 8».

Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения

$$36^{x-5} = \frac{1}{6}$$

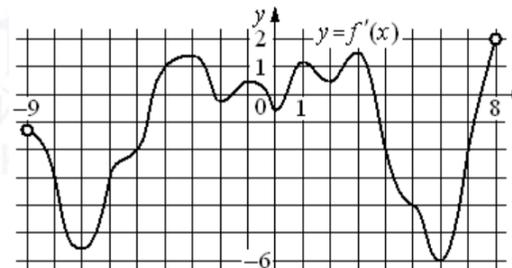
Ответ: _____.

- 6 Найдите значение выражения

$$0,75^{\frac{1}{8}} \cdot 4^{\frac{1}{4}} \cdot 12^{\frac{7}{8}}$$

Ответ: _____.

- 7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 8)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-7; 5]$.



Ответ: _____.

- 8 Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полёта будет не меньше 3,2 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 16$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Ответ: _____.

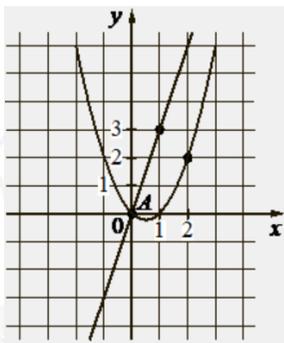
- 9 Расстояние между пристанями А и В равно 192 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через 3 часа вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот проплыл 92 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

vk.com/ege100ballov



- 10 На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .



Ответ: _____.

- 11 Найдите точку минимума функции

$$y = (x^2 - 11x + 11) \cdot e^{x+13}.$$

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 12 а) Решите уравнение

$$2\cos^2 x + 2\sin 2x = 3.$$

- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right].$$

- 13 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 8. На рёбрах AA_1 и CC_1 отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = 3$, $CN = 1$.

- а) Докажите, что плоскость MNB_1 разбивает призму на два многогранника, объёмы которых равны.
б) Найдите объём тетраэдра MNB_1 .

- 14 Решите неравенство

$$27 \cdot 45^x - 27^{x+1} - 12 \cdot 15^x + 12 \cdot 9^x + 5^x - 3^x \leq 0.$$

- 15 Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование.

В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $2t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Владимир платит рабочему 500 рублей.

Владимиру нужно каждую неделю производить 580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придётся тратить еженедельно на оплату труда рабочих?



16 В прямоугольном треугольнике ABC точки M и N – середины гипотенузы AB и катета BC соответственно. Биссектриса угла BAC пересекает прямую MN в точке L .

- а) Докажите, что треугольники AML и BLC подобны.
 б) Найдите отношение площадей этих треугольников, если $\cos \angle BAC = \frac{7}{25}$.

17 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^3 + x^2 - 9a^2x - 2x + a}{x^3 - 9a^2x} = 1$$

имеет ровно один корень.

18 Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).

- а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 18?
 б) Каково наибольшее значение n , если сумма всех данных чисел меньше 800?
 в) Найдите все возможные значения n , если сумма всех данных чисел равна 111.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

О проекте «Пробный ЕГЭ каждую неделю»

Данный ким составлен командой всероссийского волонтерского проекта «ЕГЭ 100 баллов» <https://vk.com/ege100ballov> и безвозмездно распространяется для любых некоммерческих образовательных целей.

Нашли ошибку в варианте?

Напишите нам, пожалуйста, и мы обязательно её исправим!

Для замечаний и пожеланий: https://vk.com/topic-10175642_49105931
 (также доступны другие варианты для скачивания)

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	Более 10 лет подготовки к ЕГЭ и ОГЭ
Регалии:	Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике (профиль) 39 учеников набрали 96-100 баллов на ЕГЭ 2022 Высшее образование (ТГУ, 2009-2014) Победитель трёх олимпиад по высшей математике
Аккаунт и группа ВК:	https://vk.com/eugene10 https://vk.com/shkolapifagora
Ютуб и инстаграм:	https://www.youtube.com/c/pifagor1 https://www.instagram.com/shkola_pifagora/



14 Решите неравенство
 $27 \cdot 45^x - 27^{x+1} - 12 \cdot 15^x + 12 \cdot 9^x + 5^x - 3^x \leq 0$.

$$27 \cdot 9^x \cdot (5^x - 3^x) - 12 \cdot 3^x \cdot (5^x - 3^x) + (5^x - 3^x) \leq 0$$

$$(5^x - 3^x) \cdot (27 \cdot 9^x - 12 \cdot 3^x + 1) \leq 0$$

$$(5^x - 3^x) \cdot \frac{9 \cdot 3^x}{3^x} \cdot (3^x - \frac{1}{9}) \cdot (3^x - \frac{1}{3}) \leq 0$$

$$(5^x - 3^x) \cdot (9 \cdot 3^x - 1) \cdot (3 \cdot 3^x - 1) \leq 0 \quad | : 3^x$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x - \left(\frac{9}{3}\right) \cdot \left(3^{x+2} - 3^0\right) \cdot \left(3^{x+1} - 3^0\right) \leq 0$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x - 1 \cdot (x+2) \cdot (x+1) \leq 0$$

ОТВЕТ: $(-\infty; -2] \cup [-1; 0]$

Источники:

ФИПИ (старый банк)
 Основная волна (Резерв) 2020

$$27t^2 - 12t + 1 = 0$$

$$D = 144 - 108 = 36$$

$$t = \frac{12 \pm 6}{54}$$

$$t = \frac{1}{9} \quad t = \frac{1}{3}$$

РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ	
МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ	
БЫЛО	СТАЛО
$\log_a f - \log_a g$	$(a-1)(f-g)$
$a^f - a^g$	$(a-1)(f-g)$
$ f - g $	$(f-g)(f+g)$
$\sqrt{f} - \sqrt{g}$	$(f-g)$

15 Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование.

В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $2t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Владимир платит рабочему 500 рублей.

Владимиру нужно каждую неделю производить 580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придётся тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

	часы	единица товара
I	x^2	$2x$
II	y^2	$5y$

① $2x + 5y = 580$
 Выразим $y = \frac{580 - 2x}{5}$
 $y = 116 - 0.4x$
 $\begin{cases} 116 - 0.4x \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x \leq 290 \end{cases}$

ОТВЕТ: 5 800 000 р.

Источники:

ФИПИ (старый банк)
 Яценко 2018
 Досрочная волна 2015

② Сумма Владимира = $500 \cdot (x^2 + y^2)$
 Найдем наименьшее значение функции:
 $f(x) = 500x^2 + 500y^2$
 $= 500x^2 + 500 \cdot (116 - 0.4x)^2$
 $= 500x^2 + 500 \cdot (116^2 - 2 \cdot 116 \cdot \frac{2}{5}x + \frac{4}{25}x^2)$
 $= 500x^2 + 500 \cdot 116^2 - 1000 \cdot 116 \cdot \frac{2}{5}x + 80x^2$
 $f'(x) = 1000x - 46400 + 160x = 0$
 $1160x = 46400$
 $x = 40$

$x = 40$
 $f(x_{min}) = f(40) = 500 \cdot 1600 + 500 \cdot (116 - 16)^2 = 800000 + 500000 = 5\ 800\ 000$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

vk.com/ege100ballov



16 В прямоугольном треугольнике ABC точки M и N – середины гипотенузы AB и катета BC соответственно. Биссектриса угла BAC пересекает прямую MN в точке L .

Источники:
Основная волна 2016

- а) Докажите, что треугольники AML и BLC подобны.
б) Найдите отношение площадей этих треугольников, если $\cos \angle BAC = \frac{7}{25}$.

а) $\angle CAL = \angle ALM$
(накрест лежащие)

② $AM = BM = CM = ML$
 \Rightarrow можно описать окружность около $\triangle ABC$ с центром M

③ $\angle BCL = \angle BAL = \alpha$ (опираются на одну дугу)
 $\angle CBL = \angle CAL = \alpha$

ОТВЕТ: $\frac{25}{36}$

$\Rightarrow \triangle AML \sim \triangle BLC$ по 2 углам (α и α)

① $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$
 $1 - 2\sin^2 \alpha = \frac{7}{25}$
 $\sin^2 \alpha = \frac{3}{25}$
 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$

② Коэффициент k – коэффициент подобия
 $k = \frac{AM}{BC} = \frac{ML}{BL} = \frac{2,5x}{3x} = \frac{5}{6}$

③ $\triangle ABL$ – прямоугольный, т.к. AB – диаметр
и $\triangle ABL$ вписан в окр.
 $\sin \alpha = \frac{BL}{AB} = \frac{3}{5}$
 $BL = 3x$
 $AB = 5x$
Тогда $ML = 2,5x$

④ $\frac{S_{AML}}{S_{BLC}} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

17 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^3 + x^2 - 9a^2x - 2x + a = 1$$

$$x^3 - 9a^2x = 1 - x^2 + 2x - a$$

имеет ровно один корень.

Источники:
ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Основная волна 2016

$$\frac{x^3 + x^2 - 9a^2x - 2x + a}{x^3 - 9a^2x} = 1$$

$$\frac{x^2 - 2x + a}{x \cdot (x^2 - 9a^2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + a = 0 \\ x \neq 0 \\ x \neq 3a \\ x \neq -3a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -x^2 + 2x \\ x \neq 0 \\ a \neq \frac{x}{3} \\ a \neq -\frac{x}{3} \end{cases}$$

$x_0 = \frac{-2}{-2} = 1$
 $a_0 = 1$

ОТВЕТ: $\left\{-\frac{7}{9}, 0, \frac{5}{9}, 1\right\}$

Найдем ординату точки В

$$-x^2 + 2x = \frac{1}{3}x$$

$$x^2 - \frac{5}{3}x = 0$$

$$3x^2 - 5x = 0$$

$$x(3x - 5) = 0$$

$$x = 0 \quad x = \frac{5}{3}$$

$a_B = \frac{5}{9} = \frac{1}{9}$

Найдем ординату точки С

$$-x^2 + 2x = -\frac{x}{3}$$

$$x^2 - \frac{7}{3}x = 0$$

$$x = 0 \quad x = \frac{7}{3}$$

$a_C = \frac{7}{9}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4



ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 220912



18 Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).
 а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 18?
 б) Каково наибольшее значение n , если сумма всех данных чисел меньше 800?
 в) Найдите все возможные значения n , если сумма всех данных чисел равна 111.

Источники:
 ЕГЭ (старый банк)
 Пробный ЕГЭ 2015
 Досрочный вариант 2013
 АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ
 $a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$
 $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$
 $d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$

а) $2, 3, 6, 9$
 б) $S < 800$
 $\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n < 800 \quad | :2$
 $(a_1 + a_n) \cdot n < 1600$
 $(2a_1 + d \cdot (n-1)) \cdot n < 1600$
 Для нахождения наибольшего n возм.
 $d=1$ и $a_1=1$
 $(2 + (n-1)) \cdot n - 1600 < 0$
 $n^2 + n - 1600 < 0$
 $D = 1 + 6400 = 6401$
 $\sqrt{6401} \approx 80,01$
 $n < \frac{-1 + 80,01}{2} \approx 39,5$
 ОТВЕТ: а) да
 б) 39
 в) 3; 6

$\Rightarrow n_{\max} = 39$
 $1 \ 2 \ 3 \ \dots \ 38 \ 39$
 $S_n = \frac{1+39}{2} \cdot 39 = 770$
 б) $S_n = 111$
 $\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = 111 \quad | :2$
 $(a_1 + a_n) \cdot n = 222$
 $(a_1 + a_1 + d \cdot (n-1)) \cdot n = 222$
 $(2a_1 + d \cdot (n-1)) \cdot n = 222$
 Если $n=3$, то $2a_1 + 2d = 74$
 $a_1 + d = 37$
 Пусть $a_1 = 1$ $d = 36$
 $1 \ 37 \ 73$
 Если $n=6$, то $2a_1 + 5d = 37$
 $a_1 = 1$ $d = 7$
 $1 \ 8 \ 15 \ 22 \ 29 \ 36$
 Если $n=37$, то $2a_1 + 36d = 6$
 $a_1 + 18d = 3$
 Если $a_1 = 21$
 $d = -1$
 $21 \ 20 \ 19 \ 18 \ \dots$
 37 штук
 Если $n=74$ \emptyset
 $n=111$ \emptyset
 $n=222$ \emptyset

Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта а; – обоснованное решение пункта б; – искомая оценка в пункте в; – пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособнадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развернутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1. Расхождение между баллами, выставленными двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только те ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением.

2. Расхождение между суммами баллов, выставленными двумя экспертами за выполнение заданий 12–18, составляет 3 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

3. Расхождение в результатах оценивания двумя экспертами ответа на одно из заданий 12–18 заключается в том, что один эксперт указал на отсутствие ответа на задание, а другой выставил за выполнение этого задания ненулевой балл. В этом случае третий эксперт проверяет только ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением. Ситуации, в которых один эксперт указал на отсутствие ответа в экзаменационной работе, а второй эксперт выставил нулевой балл за выполнение этого задания, не являются ситуациями существенного расхождения в оценивании.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2

