

ДОКАЖИТЕ, ЧТО СЕЧЕНИЕ ИЛИ ГРАНЬ ЯВЛЯЕТСЯ ... (ПУНКТ А)

14 Основанием прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной $5\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{14}$. Точка K – середина ребра BB_1 . Через точки K и C_1 проведена плоскость α параллельная прямой BD_1 .

- Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.
- Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α .

1 (дз)

14 Основанием прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной $3\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{7}$. Точка K – середина ребра BB_1 . Через точки K и C_1 проведена плоскость α параллельная прямой BD_1 .

- Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.
- Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α .

2

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ стороны основания равны 16, боковые рёбра равны 11.

- Докажите, что сечение призмы плоскостью, проходящей через A_1 , B_1 и середину ребра BC , является трапецией.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины A_1 , B_1 и середину ребра BC .

2 (дз)

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ стороны основания равны 20, боковые рёбра равны 11.

- Докажите, что сечение призмы плоскостью, проходящей через A_1 , B_1 и середину ребра BC , является трапецией.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины A_1 , B_1 и середину ребра BC .

3

14 В треугольной пирамиде $SABC$ известны боковые рёбра: $SA = SB = 7$, $SC = 5$. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы CM треугольника ABC . Эта высота равна 4.

- Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
- Найдите объём пирамиды $SABC$.

3 (дз)

14 В треугольной пирамиде $SABC$ известны боковые рёбра: $SA = SB = 13$, $SC = 3\sqrt{17}$. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы CM треугольника ABC . Эта высота равна 12.

- Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
- Найдите объём пирамиды $SABC$.

4

14

Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны 12. Основание высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1 , M – середина ребра AS , точка L лежит на ребре BC так, что $BL:LC = 1:2$.

- Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью S_1LM – равнобокая трапеция.
- Вычислите длину средней линии этой трапеции.

4 (дз)

14

Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны 6. Основание высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1 , M – середина ребра AS , точка L лежит на ребре BC так, что $BL:LC = 1:2$.

- Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью S_1LM – равнобокая трапеция.
- Вычислите длину средней линии этой трапеции.

5

14

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена секущая плоскость, содержащая диагональ AC_1 и пересекающая рёбра BB_1 и DD_1 в точках F и E соответственно.

- Докажите, что сечение AFC_1E – параллелограмм.
- Найдите площадь сечения, если известно, что AFC_1E – ромб и $AB = 3$, $BC = 2$, $AA_1 = 5$.

5 (дз)

нет аналога

6

14

Точка E – середина ребра AA_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

- Докажите, что сечение куба плоскостью DEB_1 является ромбом.
- Найдите угол между прямыми DE и BD_1 .

6 (дз)

нет аналога

7

14

Дан прямой круговой конус с вершиной M . Осевое сечение конуса – треугольник с углом 120° при вершине M . Образующая конуса равна $2\sqrt{3}$. Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

- Докажите, что полученный в сечении треугольник тупоугольный.
- Найдите площадь сечения.

7 (дз)

нет аналога

8

14

Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC , является ромб.

- Докажите, что грань $ABCD$ – квадрат.
- Найдите угол между плоскостями α и BCC_1 , если $AA_1 = 6$, $AB = 4$.

8 (дз)

14

Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC , является ромб.

- а) Докажите, что грань $ABCD$ – квадрат.
 б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1 , если $AA_1 = 10$, $AB = 12$.

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{6}$. На рёбрах AB , $A_1 D_1$ и $C_1 D_1$ отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = A_1 N = C_1 K = 1$.

- а) Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром BC . Докажите, что $MNKL$ – квадрат.
 б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания $AB = 6$, а боковое ребро $AA_1 = 4\sqrt{3}$. На рёбрах AB , $A_1 D_1$ и $C_1 D_1$ отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = A_1 N = C_1 K = 1$.

- а) Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром BC . Докажите, что $MNKL$ – квадрат.
 б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

14

В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{2}$. На рёбрах AB , $A_1 B_1$ и $B_1 C_1$ отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = B_1 N = C_1 K = 1$.

- а) Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром AC . Докажите, что $MNKL$ – квадрат.
 б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

10 (дз)
нет аналога

Докажите, что плоскость проходит через конкретную точку (пункт а)

14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 6 : 1$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1 F : FB = 3 : 4$, а точка T – середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 30$, $AA_1 = 35$.

- а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
 б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT .

1 (дз)

14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 5 : 3$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1 F : FB = 5 : 11$, а точка T – середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 6\sqrt{2}$, $AD = 10$, $AA_1 = 16$.

- а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
 б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT .

2

14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 3 : 1$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 1 : 3$, а на ребре $B_1 C_1$ — точка T так, что $B_1 T : TC_1 = 1 : 2$. Известно, что $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$.

- а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
 б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью $BB_1 C_1$.

2 (дз)

14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 3 : 2$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 2 : 3$, а на ребре $B_1 C_1$ — точка T так, что $B_1 T : TC_1 = 2 : 1$. Известно, что $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 5$.

- а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
 б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью $BB_1 C_1$.

Докажите, что пирамида - правильный тетраэдр или что пирамида правильная (пункт а)

1

14

Длина диагонали куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 3. На луче $A_1 C$ отмечена точка P так, что $A_1 P = 4$.

- а) Докажите, что $PBDC_1$ — правильный тетраэдр.
 б) Найдите длину отрезка AP .

1 (дз)

14

Длина диагонали куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна $3\sqrt{11}$. На луче DB_1 отмечена точка P так, что $DP = 4\sqrt{11}$.

- а) Докажите, что $PA_1 BC_1$ — правильный тетраэдр.
 б) Найдите длину отрезка AP .

2

14

Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 6. Точки K , L и M — центры граней $ABCD$, $AA_1 D_1 D$ и $CC_1 D_1 D$ соответственно.

- а) Докажите, что $B_1 KLM$ — правильная пирамида.
 б) Найдите объём $B_1 KLM$.

2 (дз)

нет аналога

Отношение отрезков (пункт а)

1

14

Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна 4, а сторона основания равна 6. Около основания пирамиды описана окружность.

- а) Докажите, что отношение длины этой окружности к стороне основания равно $\pi\sqrt{2}$.
 б) Найдите площадь боковой поверхности конуса, основанием которого служит эта окружность, а вершина совпадает с вершиной пирамиды.

1 (дз)

14

Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна $6\sqrt{2}$, а сторона основания равна 4. Около основания пирамиды описана окружность.

- Докажите, что отношение длины этой окружности к стороне основания равно $\pi\sqrt{2}$.
- Найдите площадь боковой поверхности конуса, основанием которого служит эта окружность, а вершина совпадает с вершиной пирамиды.

2

14

Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Плоскость α проходит через прямую BC_1 параллельно прямой AB_1 .

- Докажите, что плоскость α проходит через середину ребра AC .
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью α , если призма правильная, сторона её основания равна $2\sqrt{3}$, а боковое ребро равно 1.

2 (дз)

нет аналога

3

14

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра $AB = 35$, $AD = 12$, $CC_1 = 21$.

- Докажите, что высоты треугольников ABD и A_1BD , проведённые к стороне BD , имеют общее основание.
- Найдите угол между плоскостями ABC и A_1DB .

3 (дз)

нет аналога

4

14

Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точки K и L — центры граней BB_1C_1C и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно.

- Докажите, что точка пересечения прямой KL с плоскостью основания $ABCD$ равноудалена от вершин B и C .
- Пусть M — середина ребра CD . Найдите котангенс угла между прямыми MD_1 и KL , если известно, что $AB = 2AA_1$.

4 (дз)

нет аналога

5

14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1E = 4EA$. Точка T — середина ребра B_1C_1 . Известно, что $AB = 3\sqrt{2}$, $AD = 16$, $AA_1 = 20$.

- Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении 3:2.
- Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1 .

5 (дз)

14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1E = 6EA$. Точка T — середина ребра B_1C_1 . Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$.

- Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении 4:3.
- Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1 .

6

14

Плоскость α проходит через сторону AB основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ и середину ребра B_1C_1 .

- а) Пусть M – точка пересечения плоскости α с прямой CC_1 . Докажите, что C_1 – середина отрезка CM .
- б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α , если все рёбра призмы равны a .

6 (дз)
нет аналога

7

14

В правильной четырехугольной призме $KLMNK_1L_1M_1N_1$ точка E делит боковое ребро KK_1 в отношении $KE:EK_1 = 1:3$. Через точки L и E проведена плоскость α , параллельная прямой KM и пересекающая ребро NN_1 в точке F .

- а) Докажите, что плоскость α делит ребро NN_1 пополам.
- б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью грани $KLMN$, если известно, что $KL = 6$, $KK_1 = 4$.

7 (дз)
нет аналога

8

14

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 60, а боковое ребро SA равно 37. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .
- б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α .

8 (дз)

14

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .
- б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α .

9

14

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 7. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 4$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

- а) Докажите, что $A_1P:PB_1 = 1:3$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1 .
- б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α .

9 (дз)

14

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

- а) Докажите, что $A_1P:PB_1 = 1:2$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1 .
- б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α .

10

14

Основание прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 12$, $AD = \sqrt{31}$. Расстояние между прямыми AC и $B_1 D_1$ равно 5.

- а) Докажите, что плоскость, проходящая через точку D перпендикулярно прямой BD_1 в отношении 1:7, считая от вершины D_1 .
- б) Найдите косинус угла между плоскостью, проходящей через точку D перпендикулярно прямой BD_1 , и плоскостью основания призмы.

10 (дз)
нет аналога
11

14

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 4$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

- а) Докажите, что $A_1 P : P B_1 = 3 : 1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 B_1$.
- б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани $BB_1 C_1 C$.

11 (дз)

14

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

- а) Докажите, что $A_1 P : P B_1 = 2 : 1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 B_1$.
- б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани $BB_1 C_1 C$.

12

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на ребре AA_1 отмечена точка K , причём $AK : KA_1 = 1 : 3$. Через точки K и B проведена плоскость α , параллельная прямой AC и пересекающая ребро DD_1 в точке M .

- а) Докажите, что точка M — середина ребра DD_1 .
- б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α , если $AB = 5$, $AA_1 = 4$.

12 (дз)

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка K делит боковое ребро AA_1 в отношении $AK : KA_1 = 1 : 2$. Через точки B и K проведена плоскость α , параллельная прямой AC и пересекающая ребро DD_1 в точке M .

- а) Докажите, что плоскость α делит ребро DD_1 в отношении $DM : MD_1 = 2 : 1$.
- б) Найдите площадь сечения, если известно, что $AB = 4$, $AA_1 = 6$.

13

14

На рёбрах DD_1 и BB_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 10$, а $B_1 Q = 4$. Плоскость $A_1 P Q$ пересекает ребро CC_1 в точке M .

- а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1 .
- б) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости $A_1 P Q$.

13 (дз)

14

На рёбрах DD_1 и BB_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 8 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 7$, а $B_1 Q = 3$. Плоскость $A_1 P Q$ пересекает ребро CC_1 в точке M .

- а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1 .
- б) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости $A_1 P Q$.

14

14 Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Плоскость α проходит через прямую BA_1 параллельно прямой CB_1 .

- а) Докажите, что плоскость α делит диагональ AC_1 параллелепипеда в отношении 2:1, считая от вершины C_1 .
- б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью α , если он прямой, его основание $ABCD$ – ромб с диагоналями $AC = 24$ и $BD = 10$, а боковое ребро параллелепипеда равно 5.

14 (дэ)
нет аналога
15

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна боковому ребру SA . Медианы треугольника SBC пересекаются в точке M .

- а) Докажите, что $AM = AD$.
- б) Точка N – середина AM . Найдите SN , если $AD = 6$.

15 (дэ)
нет аналога
16

14 Плоскость γ , содержащая диагональ BD грани куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с основаниями $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$, пересекает ребро $B_1 C_1$ и делит площадь боковой поверхности куба в отношении 2:1.

- а) Докажите, что плоскость γ делит ребро $B_1 C_1$ в отношении 2:1, считая от вершины B_1 .
- б) В каком отношении плоскость γ делит объём куба?

16 (дэ)
нет аналога
17

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .
- б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C , а основанием – сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α .

17 (дэ)

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .
- б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C , а основанием – сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α .

18

14 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S боковое ребро вдвое больше стороны основания.

- а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C , делит апофему грани ASB в отношении 1:2, считая от вершины S .
- б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C , делит ребро SF , считая от вершины S .

18 (дэ)
нет аналога
19

14

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 4$, $BC = 3$, $AA_1 = 2$. Точки P и Q – середины рёбер $A_1 B_1$ и CC_1 соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро $B_1 C_1$ в точке U .

- а) Докажите, что $B_1 U : UC_1 = 2 : 1$.
 б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью APQ .

19 (дз)
нет аналога
20

14

На рёбрах CD и BB_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 4$, а $B_1 Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M .

- а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1 .
 б) Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ .

20 (дз)
нет аналога
21

14

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 4. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .
 б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .

21 (дз)
нет аналога
22

14

Дана правильная призма $ABCA_1 B_1 C_1$, у которой стороны основания $AB = 4$, а боковое ребро $AA_1 = 9$. Точка M – середина ребра AC , а на ребре AA_1 взята точка T так, что $AT = 5$.

- а) Докажите, что плоскость $BB_1 M$ делит отрезок $C_1 T$ пополам.
 б) Плоскость BTC_1 делит отрезок MB_1 на две части. Найдите длину меньшей из них.

22 (дз)
нет аналога
23

14

В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка M середина ребра $C_1 D_1$, а точка K делит ребро AA_1 в отношении $AK : KA_1 = 1 : 3$. Через точки K и M проведена плоскость α , параллельная прямой BD и пересекающая диагональ $A_1 C$ в точке O .

- а) Докажите, что плоскость α делит диагональ $A_1 C$ в отношении $A_1 O : OC = 3 : 5$.
 б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью (ABC) , если дополнительно известно, что $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб.

23 (дз)

14

В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка F середина ребра AB , а точка E делит ребро DD_1 в отношении $DE : ED_1 = 6 : 1$. Через точки F и E проведена плоскость α , параллельная прямой AC и пересекающая диагональ $B_1 D$ в точке O .

- а) Докажите, что плоскость α делит диагональ DB_1 в отношении $DO : OB_1 = 2 : 3$.
 б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью (ABC) , если дополнительно известно, что $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – правильная четырёхугольная призма, сторона основания которой равна 4, а высота равна 7.

24

14

Основание $ABCD$ призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — равнобедренная трапеция с основаниями AB и CD . Боковые стороны равны меньшему основанию CD , а их продолжения пересекаются под углом 60° .

- а) Плоскость $CA_1 D_1$ пересекает ребро AB в точке M . Докажите, что прямая $D_1 M$ проходит через середину диагонали $A_1 C$.
- б) Найдите угол между боковым ребром BB_1 и плоскостью $CA_1 D_1$, если призма прямая, а $AA_1 : AD = \sqrt{3} : 2$.

24 (дз)
нет аналога

Угол между прямыми (пункты а и б)

1

14

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 6.

- а) Докажите, что угол между прямыми AC и BD_1 равен 90° .
- б) Найдите расстояние между прямыми AC и BD_1 .

1 (дз)
нет аналога

2

14

Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Диагонали боковых граней $AA_1 B_1 B$ и $BB_1 C_1 C$ равны 15 и 9 соответственно, $AB = 13$.

- а) Докажите, что треугольник $BA_1 C_1$ прямоугольный.
- б) Найдите объём пирамиды $AA_1 C_1 B$.

2 (дз)
нет аналога

3

14

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A , B и C , а на окружности другого основания — точка C_1 , причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 45^\circ$, $AB = CC_1 = \sqrt[4]{8}$.

- а) Докажите, что угол между прямыми BC_1 и AC равен 60° .
- б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

3 (дз)

14

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A , B и C , а на окружности другого основания — точка C_1 , причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = \sqrt{2}$, $CC_1 = 4$.

- а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 60° .
- б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

4

14

Основанием прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$, $AB = AA_1$.

- а) Докажите, что прямые $A_1 C$ и BD перпендикулярны.
- б) Найдите объём призмы, если $A_1 C = BD = 2$.

4 (дз)
нет аналога

5

14

Дана правильная четырёхугольная пирамида $MABCD$ с основанием $ABCD$, стороны основания которой равны $5\sqrt{2}$. Точка L – середина ребра MB . Тангенс угла между прямыми DM и AL равен $\sqrt{2}$.

- а) Пусть O – центр основания пирамиды. Докажите, что прямые AO и LO перпендикулярны.
 б) Найдите высоту данной пирамиды.

5 (дз)
нет аналога

6

14

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B , а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1 , причём BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

- а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.
 б) Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1 , если $AB = 8$, $BB_1 = 6$, $B_1C_1 = 15$.

6 (дз)

14

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B , а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1 , причём BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

- а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.
 б) Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1 , если $AB = 6$, $BB_1 = 15$, $B_1C_1 = 8$.

7

14

Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точки K и L – центры граней $BB_1 C_1 C$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$ соответственно.

- а) Докажите, что точка пересечения прямой KL с плоскостью основания $ABCD$ равноудалена от вершин B и C .
 б) Пусть M – середина ребра CD . Найдите котангенс угла между прямыми MD_1 и KL , если известно, что $AB = 2AA_1$.

7 (дз)
нет аналога

8

14

Точки O и O_1 – центры верхнего и нижнего оснований цилиндра, точка K – середина отрезка OO_1 . На окружности верхнего основания взяты точки A и B , не лежащие на диаметре, и на окружности нижнего основания – точки A_1 и B_1 , симметричные точкам A и B соответственно относительно точки K .

- а) Докажите, что прямые AB_1 и BA_1 параллельны.
 б) Найдите площадь четырёхугольника ABA_1B_1 , если радиус основания равен 5, $AB = 6$, а высота цилиндра равна 8.

8 (дз)
нет аналога

9

14

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит ромб $ABCD$ с диагоналями $AC = 10$ и $BD = 24$.

- а) Докажите, что прямые B_1D_1 и AC_1 перпендикулярны.
 б) Найдите расстояние между прямыми B_1D_1 и AC_1 , если известно, что боковое ребро призмы равно 20.

9 (дз)

14

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит ромб $ABCD$ с диагоналями $AC = 16$ и $BD = 12$.

- Докажите, что прямые BD_1 и AC перпендикулярны.
- Найдите расстояние между прямыми BD_1 и AC , если известно, что боковое ребро призмы равно 24.

10

14

Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

- Докажите, что диагональ $A_1 C$ куба и диагональ DC_1 грани $DD_1 C_1 C$ перпендикулярны.
- Найдите расстояние от точки M – середины ребра AA_1 , до плоскости $BC_1 D$, если ребро куба равно $2\sqrt{3}$.

10 (дэ)

нет аналога

11

14

В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 13$, $PB = 15$, $\cos \angle PBA = \frac{48}{65}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C . Прямые PA и BC перпендикулярны.

- Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
- Найдите объём пирамиды $PABC$.

11 (дэ)

14

В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 17$, $PB = 10$, $\cos \angle PBA = \frac{32}{85}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C . Прямые PA и BC перпендикулярны.

- Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
- Найдите объём пирамиды $PABC$.

12

14

Основанием прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является параллелограмм $ABCD$. Известно, что $AB_1 = 10$, $DB_1 = 8$ и $AD = 6$.

- Докажите, что прямые DB и BC перпендикулярны.
- Найдите площадь полной поверхности пирамиды $B_1 ABD$, если $B_1 C = 6\sqrt{2}$.

12 (дэ)

нет аналога

13

14

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{21}$, $SB = \sqrt{85}$, $SD = \sqrt{57}$.

- Докажите, что SA – высота пирамиды.
- Найдите угол между прямыми SC и BD .

13 (дэ)

нет аналога

14

14

Точка E – середина ребра AA_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

- Докажите, что сечение куба плоскостью DEB_1 является ромбом.
- Найдите угол между прямыми DE и BD_1 .

14 (дэ)

нет аналога

15

14 Точки P и Q – середины рёбер AD и CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ соответственно.

- Докажите, что прямые $B_1 P$ и $Q B$ перпендикулярны.
- Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку P и перпендикулярной прямой BQ , если ребро куба равно 4.

15 (дз)

14 Точки P и Q – середины рёбер AD и CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ соответственно.

- Докажите, что прямые $B_1 P$ и $Q B$ перпендикулярны.
- Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку P и перпендикулярной прямой BQ , если ребро куба равно 10.

16

14

Основание прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – ромб $ABCD$ с углом 120° при вершине D , а боковые грани призмы – квадраты.

- Докажите, что прямые $A_1 C$ и BD перпендикулярны.
- Найдите расстояние между этими прямыми, если сторона основания призмы равна $8\sqrt{3}$.

16 (дз)

нет аналога

17

14 В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 6.

- Докажите, что угол между прямыми AC и BC_1 равен 60° .
- Найдите расстояние между прямыми AC и BC_1 .

17 (дз)

нет аналога

18

14 В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ стороны основания равны 5, а боковые рёбра равны 11.

- Докажите, что прямые CA_1 и $C_1 D_1$ перпендикулярны.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины C , A_1 и F_1 .

18 (дз)

нет аналога

19

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ угол между диагоналями $A_1 C$ и $B_1 D$ равен 60° .

- Докажите, что диагонали $A_1 C$ и AC_1 перпендикулярны.
- Найдите расстояние от вершины A_1 до плоскости BMD , где точка M – середина ребра CC_1 , если сторона основания призмы равна 8.

19 (дз)

нет аналога

1

Угол между прямой и плоскостью (пункты а и б)

14 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{11}$, $SB = 3\sqrt{3}$, $SD = 2\sqrt{5}$.

- Докажите, что SA – высота пирамиды.
- Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB .

1 (дз)

14 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = \sqrt{5}$ и $BC = 2$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{7}$, $SB = 2\sqrt{3}$, $SD = \sqrt{11}$.

- Докажите, что SA – высота пирамиды.
- Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB .

2

14 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{21}$, $SB = \sqrt{85}$, $SD = \sqrt{57}$.

- Докажите, что SA – высота пирамиды.
- Найдите угол между прямыми SC и BD .

2 (дз)
нет аналога

14 Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

- Докажите, что прямая BD_1 перпендикулярна плоскости ACB_1 .
- Найдите угол между плоскостями $AD_1 C_1$ и $A_1 D_1 C$.

3 (дз)

14 Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

- Докажите, что прямая $B_1 D$ перпендикулярна плоскости $A_1 B C_1$.
- Найдите угол между плоскостями $AB_1 C_1$ и $A_1 B_1 C$.

4

14 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 12$ и $BC = 5\sqrt{3}$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 5$, $SB = 13$, $SD = 10$.

- Докажите, что SA – высота пирамиды.
- Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC .

4 (дз)

14 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 3$, $SB = 5$, $SD = 3\sqrt{5}$.

- Докажите, что SA – высота пирамиды.
- Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC .

5

14

Точки A , B и C лежат на окружности основания конуса с вершиной S , причём A и C диаметрально противоположны. Точка M – середина BC .

- Докажите, что прямая SM образует с плоскостью ABC такой же угол, как и прямая AB с плоскостью SBC .
- Найдите угол между прямой SA и плоскостью SBC , если $AB = 6$, $BC = 8$ и $SC = 5\sqrt{2}$.

5 (дз)

14

Точки A , B и C лежат на окружности основания конуса с вершиной S , причём A и C диаметрально противоположны. Точка M – середина BC .

- Докажите, что прямая SM образует с плоскостью ABC такой же угол, как и прямая AB с плоскостью SBC .
- Найдите угол между прямой SA и плоскостью SBC , если $AB = 4$, $BC = 6$ и $SC = 4\sqrt{2}$.

6

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{2}$. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = C_1 L = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

- Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .
- Найдите расстояние от точки B до плоскости γ .

6 (дз)

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{2}$. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = 4$, $C_1 L = 5$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

- Докажите, что прямая AC_1 перпендикулярна плоскости γ .
- Найдите расстояние от точки B_1 до плоскости γ .

7

14

Основание $ABCD$ призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – равнобедренная трапеция с основаниями AB и CD . Боковые стороны равны меньшему основанию CD , а их продолжения пересекаются под углом 60° .

- Плоскость $CA_1 D_1$ пересекает ребро AB в точке M . Докажите, что прямая $D_1 M$ проходит через середину диагонали $A_1 C$.
- Найдите угол между боковым ребром BB_1 и плоскостью $CA_1 D_1$, если призма прямая, а $AA_1 : AD = \sqrt{3} : 2$.

7 (дз)

нет аналога

8

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 5, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{5}$. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $CK = 2$, а $C_1 L = 1$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

- Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .
- Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка A_1 , а основание – сечение данной призмы плоскостью γ .

8 (дз)

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{2}$. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $CK = 4$, а $C_1 L = 1$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

- Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .
- Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка A_1 , а основание – сечение данной призмы плоскостью γ .

Угол между плоскостями (пункты а и б)

1

14

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра $AB = 35$, $AD = 12$, $CC_1 = 21$.

- Докажите, что высоты треугольников ABD и $A_1 BD$, проведённые к стороне BD , имеют общее основание.
- Найдите угол между плоскостями ABC и $A_1 DB$.

1 (дз)
нет аналога
2

14

Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144.

- Докажите, что угол между плоскостью SAC и плоскостью, проходящей через вершину S этой пирамиды, середину стороны AB и центр основания, равен 45° .
- Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью SAC .

2 (дз)
нет аналога
3

14

В правильной четырёхугольной призме $KLMNK_1 L_1 M_1 N_1$ точка E делит боковое ребро KK_1 в отношении $KE:EK_1 = 1:3$. Через точки L и E проведена плоскость α , параллельная прямой KM и пересекающая ребро NN_1 в точке F .

- Докажите, что плоскость α делит ребро NN_1 пополам.
- Найдите угол между плоскостью α и плоскостью грани $KLMN$, если известно, что $KL = 6$, $KK_1 = 4$.

3 (дз)
нет аналога
4

14

Основание пирамиды $PABCD$ – трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, прямые AB и CD пересекаются в точке K .

- Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.
- Найдите объём пирамиды $PKBC$, если $AB = BC = CD = 3$, а высота пирамиды равна 8.

4 (дз)

14

Дана пирамида $PABCD$, в основании – трапеция $ABCD$ с большим основанием AD . Известно, что сумма углов BAD и ADC равна 90 градусов, а плоскости PAB и PCD перпендикулярны основанию, прямые AB и CD пересекаются в точке K .

- Докажите, что плоскость PAB перпендикулярна плоскости PCD .
- Найдите объём $PKBC$, если $AB = BC = CD = 2$, а $PK = 12$.

5

14

Основание прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 12$, $AD = \sqrt{31}$. Расстояние между прямыми AC и $B_1 D_1$ равно 5.

- а) Докажите, что плоскость, проходящая через точку D перпендикулярно прямой BD_1 в отношении 1:7, считая от вершины D_1 .
- б) Найдите косинус угла между плоскостью, проходящей через точку D перпендикулярно прямой BD_1 , и плоскостью основания призмы.

5 (дз)
нет аналога
6

14

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 4$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

- а) Докажите, что $A_1 P : PB_1 = 3 : 1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 B_1$.
- б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани $BB_1 C_1 C$.

6 (дз)

14

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

- а) Докажите, что $A_1 P : PB_1 = 2 : 1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 B_1$.
- б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани $BB_1 C_1 C$.

7

14

Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

- а) Докажите, что прямая BD_1 перпендикулярна плоскости ACB_1 .
- б) Найдите угол между плоскостями $AD_1 C_1$ и $A_1 D_1 C$.

7 (дз)

14

Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

- а) Докажите, что прямая $B_1 D$ перпендикулярна плоскости $A_1 B C_1$.
- б) Найдите угол между плоскостями $AB_1 C_1$ и $A_1 B_1 C$.

8

14

В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 1.

- а) Докажите, что плоскости $AA_1 D_1$ и $DB_1 F_1$ перпендикулярны.
- б) Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и $DB_1 F_1$.

8 (дз)
нет аналога
9

14

В правильной треугольной пирамиде $DABC$ с основанием ABC сторона основания равна $6\sqrt{3}$, а высота пирамиды равна 8. На рёбрах AB , AC и AD соответственно отмечены точки M , N и K , такие, что $AM = AN = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ и $AK = \frac{5}{2}$.

- а) Докажите, что плоскости MNK и DBC параллельны.
- б) Найдите расстояние от точки K до плоскости DBC .

9 (дз)

14 В правильной треугольной пирамиде $BMNK$ с основанием MNK сторона основания равна 6, а высота пирамиды равна 3. На рёбрах MN , MK и MB соответственно отмечены точки F , E и P , такие, что $MF = ME = \frac{\sqrt{21}}{2}$ и $MP = \frac{7}{4}$.

- Докажите, что плоскости FEP и NBK параллельны.
- Найдите расстояние от точки P до плоскости NBK .

10

14 Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC , является ромб.

- Докажите, что грань $ABCD$ – квадрат.
- Найдите угол между плоскостями α и BCC_1 , если $AA_1 = 6$, $AB = 4$.

10 (дэ)

14 Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC , является ромб.

- Докажите, что грань $ABCD$ – квадрат.
- Найдите угол между плоскостями α и BCC_1 , если $AA_1 = 10$, $AB = 12$.

11

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах AB , CD и AS отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = DN = 4$ и $AK = 3$.

- Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
- Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC .

11 (дэ)
нет аналога

12

14 В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка M середина ребра $C_1 D_1$, а точка K делит ребро AA_1 в отношении $AK:KA_1 = 1:3$. Через точки K и M проведена плоскость α , параллельная прямой BD и пересекающая диагональ $A_1 C$ в точке O .

- Докажите, что плоскость α делит диагональ $A_1 C$ в отношении $A_1 O:OC = 3:5$.
- Найдите угол между плоскостью α и плоскостью (ABC) , если дополнительно известно, что $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб.

12 (дэ)

14 В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка F середина ребра AB , а точка E делит ребро DD_1 в отношении $DE:ED_1 = 6:1$. Через точки F и E проведена плоскость α , параллельная прямой AC и пересекающая диагональ $B_1 D$ в точке O .

- Докажите, что плоскость α делит диагональ DB_1 в отношении $DO:OB_1 = 2:3$.
- Найдите угол между плоскостью α и плоскостью (ABC) , если дополнительно известно, что $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – правильная четырёхугольная призма, сторона основания которой равна 4, а высота равна 7.

13

14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 3 : 1$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1 F : FB = 1 : 3$, а на ребре $B_1 C_1$ – точка T так, что $B_1 T : TC_1 = 1 : 2$. Известно, что $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$.

- Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
- Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью $BB_1 C_1$.

13 (дз)

14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 3 : 2$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1 F : FB = 2 : 3$, а на ребре $B_1 C_1$ – точка T так, что $B_1 T : TC_1 = 2 : 1$. Известно, что $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 5$.

- Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
- Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью $BB_1 C_1$.

Расстояние от точки до плоскости (пункты а и б)

14

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 60, а боковое ребро SA равно 37. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .
- Найдите расстояние от вершины A до плоскости α .

1 (дз)

14

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .
- Найдите расстояние от вершины A до плоскости α .

2

14

Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

- Докажите, что диагональ $A_1 C$ куба и диагональ DC_1 грани $DD_1 C_1 C$ перпендикулярны.
- Найдите расстояние от точки M – середины ребра AA_1 , до плоскости $BC_1 D$, если ребро куба равно $2\sqrt{3}$.

2 (дз)

нет аналога

3

14

На рёбрах DD_1 и BB_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 10$, а $B_1 Q = 4$. Плоскость $A_1 P Q$ пересекает ребро CC_1 в точке M .

- Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1 .
- Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости $A_1 P Q$.

3 (дз)

14 На рёбрах DD_1 и BB_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 8 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 7$, а $B_1 Q = 3$. Плоскость $A_1 P Q$ пересекает ребро CC_1 в точке M .

- Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1 .
- Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости $A_1 P Q$.

14 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 12$ и $BC = 5\sqrt{3}$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 5$, $SB = 13$, $SD = 10$.

- Докажите, что SA — высота пирамиды.
- Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC .

14 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 3$, $SB = 5$, $SD = 3\sqrt{5}$.

- Докажите, что SA — высота пирамиды.
- Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC .

14 На рёбрах CD и BB_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 4$, а $B_1 Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M .

- Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1 .
- Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ .

14 В правильной треугольной пирамиде $DABC$ с основанием ABC сторона основания равна $6\sqrt{3}$, а высота пирамиды равна 8. На рёбрах AB , AC и AD соответственно отмечены точки M , N и K , такие, что $AM = AN = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ и $AK = \frac{5}{2}$.

- Докажите, что плоскости MNK и DBC параллельны.
- Найдите расстояние от точки K до плоскости DBC .

14 В правильной треугольной пирамиде $BMNK$ с основанием MNK сторона основания равна 6, а высота пирамиды равна 3. На рёбрах MN , MK и MB соответственно отмечены точки F , E и P , такие, что $MF = ME = \frac{\sqrt{21}}{2}$ и $MP = \frac{7}{4}$.

- Докажите, что плоскости FEP и NBK параллельны.
- Найдите расстояние от точки P до плоскости NBK .

14 В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ угол между диагоналями $A_1 C$ и $B_1 D$ равен 60° .

- Докажите, что диагонали $A_1 C$ и AC_1 перпендикулярны.
- Найдите расстояние от вершины A_1 до плоскости BMD , где точка M — середина ребра CC_1 , если сторона основания призмы равна 8.

14

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах AB , CD и AS отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = DN = 4$ и $AK = 3$.

- Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.
- Найдите расстояние от точки M до плоскости SBC .

8 (дз)
нет аналога
9

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{2}$. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = C_1 L = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

- Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .
- Найдите расстояние от точки B до плоскости γ .

9 (дз)

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{2}$. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = 4$, $C_1 L = 5$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

- Докажите, что прямая AC_1 перпендикулярна плоскости γ .
- Найдите расстояние от точки B_1 до плоскости γ .

10

14

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB = 6$, высота $SO = 4$. На апофеме ST грани BSC отмечена точка K так, что $SK = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BC и содержит точки K и D .

- Докажите, что расстояние от точки C до плоскости γ равно расстоянию от точки B до плоскости γ .
- Найдите объём пирамиды, вершина которой точка C , а основание – сечение данной пирамиды плоскостью γ .

10 (дз)

14

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB = 16$, высота $SO = 6$. На апофеме ST грани BSC отмечена точка K так, что $SK = 8$. Плоскость γ параллельна прямой BC и содержит точки K и A .

- Докажите, что расстояние от точки B до плоскости γ равно расстоянию от точки C до плоскости γ .
- Найдите объём пирамиды, вершина которой точка B , а основание – сечение данной пирамиды плоскостью γ .

Расстояние между прямыми (пункт б)

14

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 6.

- Докажите, что угол между прямыми AC и BD_1 равен 90° .
- Найдите расстояние между прямыми AC и BD_1 .

1 (дз)

14 В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит ромб $ABCD$ с диагоналями $AC = 10$ и $BD = 24$.

- Докажите, что прямые $B_1 D_1$ и AC_1 перпендикулярны.
- Найдите расстояние между прямыми $B_1 D_1$ и AC_1 , если известно, что боковое ребро призмы равно 20.

2 (дв)

14

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит ромб $ABCD$ с диагоналями $AC = 16$ и $BD = 12$.

- Докажите, что прямые BD_1 и AC перпендикулярны.
- Найдите расстояние между прямыми BD_1 и AC , если известно, что боковое ребро призмы равно 24.

3

14

Основание прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – ромб $ABCD$ с углом 120° при вершине D , а боковые грани призмы – квадраты.

- Докажите, что прямые $A_1 C$ и BD перпендикулярны.
- Найдите расстояние между этими прямыми, если сторона основания призмы равна $8\sqrt{3}$.

3 (дв)

нет аналога

4

14 В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 6.

- Докажите, что угол между прямыми AC и BC_1 равен 60° .
- Найдите расстояние между прямыми AC и BC_1 .

4 (дв)

нет аналога

Найти отрезок (пункт б)

1

14

Дана правильная четырёхугольная пирамида $MABCD$ с основанием $ABCD$, стороны основания которой равны $5\sqrt{2}$. Точка L – середина ребра MB . Тангенс угла между прямыми DM и AL равен $\sqrt{2}$.

- Пусть O – центр основания пирамиды. Докажите, что прямые AO и LO перпендикулярны.
- Найдите высоту данной пирамиды.

1 (дв)

нет аналога

2

14

Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны 12. Основание высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1 , M – середина ребра AS , точка L лежит на ребре BC так, что $BL:LC = 1:2$.

- Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью $S_1 LM$ – равнобокая трапеция.
- Вычислите длину средней линии этой трапеции.

2 (дв)

14

Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны 6. Основание высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1 , M – середина ребра AS , точка L лежит на ребре BC так, что $BL:LC = 1:2$.

- Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью S_1LM – равнобокая трапеция.
- Вычислите длину средней линии этой трапеции.

3

14

Длина диагонали куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 3. На луче A_1C отмечена точка P так, что $A_1P = 4$.

- Докажите, что $PBDC_1$ – правильный тетраэдр.
- Найдите длину отрезка AP .

3 (дз)

14

Длина диагонали куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна $3\sqrt{11}$. На луче DB_1 отмечена точка P так, что $DP = 4\sqrt{11}$.

- Докажите, что PA_1BC_1 – правильный тетраэдр.
- Найдите длину отрезка AP .

4

14

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна боковому ребру SA . Медианы треугольника SBC пересекаются в точке M .

- Докажите, что $AM = AD$.
- Точка N – середина AM . Найдите SN , если $AD = 6$.

4 (дз)

нет аналога

5

14

В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S боковое ребро вдвое больше стороны основания.

- Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C , делит апофему грани ASB в отношении 1:2, считая от вершины S .
- Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C , делит ребро SF , считая от вершины S .

5 (дз)

нет аналога

6

14

Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой стороны основания $AB = 4$, а боковое ребро $AA_1 = 9$. Точка M – середина ребра AC , а на ребре AA_1 взята точка T так, что $AT = 5$.

- Докажите, что плоскость BB_1M делит отрезок C_1T пополам.
- Плоскость BTC_1 делит отрезок MB_1 на две части. Найдите длину меньшей из них.

6 (дз)

нет аналога

1

Периметр или площадь (пункт б)

14

Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна 4, а сторона основания равна 6. Около основания пирамиды описана окружность.

- Докажите, что отношение длины этой окружности к стороне основания равно $\pi\sqrt{2}$.
- Найдите площадь боковой поверхности конуса, основанием которого служит эта окружность, а вершина совпадает с вершиной пирамиды.

1 (дз)

14

Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна $6\sqrt{2}$, а сторона основания равна 4. Около основания пирамиды описана окружность.

- Докажите, что отношение длины этой окружности к стороне основания равно $\pi\sqrt{2}$.
- Найдите площадь боковой поверхности конуса, основанием которого служит эта окружность, а вершина совпадает с вершиной пирамиды.

14

Основанием прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной $5\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{14}$. Точка K – середина ребра BB_1 . Через точки K и C_1 проведена плоскость α параллельная прямой BD_1 .

- Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.
- Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α .

14

Основанием прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной $3\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{7}$. Точка K – середина ребра BB_1 . Через точки K и C_1 проведена плоскость α параллельная прямой BD_1 .

- Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.
- Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α .

14

Дана треугольная призма $ABCA_1 B_1 C_1$. Плоскость α проходит через прямую BC_1 параллельно прямой AB_1 .

- Докажите, что плоскость α проходит через середину ребра AC .
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью α , если призма правильная, сторона её основания равна $2\sqrt{3}$, а боковое ребро равно 1.

14

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A , B и C , а на окружности другого основания – точка C_1 , причём CC_1 – образующая цилиндра, а AC – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 45^\circ$, $AB = CC_1 = \sqrt[4]{8}$.

- Докажите, что угол между прямыми BC_1 и AC равен 60° .
- Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

14

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A , B и C , а на окружности другого основания – точка C_1 , причём CC_1 – образующая цилиндра, а AC – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = \sqrt{2}$, $CC_1 = 4$.

- Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 60° .
- Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

14

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 16, боковые рёбра равны 11.

- Докажите, что сечение призмы плоскостью, проходящей через A_1 , B_1 и середину ребра BC , является трапецией.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины A_1 , B_1 и середину ребра BC .

5 (дз)

14

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 20, боковые рёбра равны 11.

- Докажите, что сечение призмы плоскостью, проходящей через A_1 , B_1 и середину ребра BC , является трапецией.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины A_1 , B_1 и середину ребра BC .

6

14

Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144.

- Докажите, что угол между плоскостью SAC и плоскостью, проходящей через вершину S этой пирамиды, середину стороны AB и центр основания, равен 45° .
- Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью SAC .

6 (дз)

нет аналога

7

14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E = 4EA$. Точка T – середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 3\sqrt{2}$, $AD = 16$, $AA_1 = 20$.

- Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении 3:2.
- Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1 .

7 (дз)

14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E = 6EA$. Точка T – середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$.

- Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении 4:3.
- Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1 .

8

14

Плоскость α проходит через сторону AB основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ и середину ребра $B_1 C_1$.

- Пусть M – точка пересечения плоскости α с прямой CC_1 . Докажите, что C_1 – середина отрезка CM .
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью α , если все рёбра призмы равны a .

8 (дз)

нет аналога

9

14

Точки O и O_1 – центры верхнего и нижнего оснований цилиндра, точка K – середина отрезка OO_1 . На окружности верхнего основания взяты точки A и B , не лежащие на диаметре, и на окружности нижнего основания – точки A_1 и B_1 , симметричные точкам A и B соответственно относительно точки K .

- Докажите, что прямые AB_1 и BA_1 параллельны.
- Найдите площадь четырёхугольника ABA_1B_1 , если радиус основания равен 5, $AB = 6$, а высота цилиндра равна 8.

9 (дз)
нет аналога
10

14

Основанием прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является параллелограмм $ABCD$. Известно, что $AB_1 = 10$, $DB_1 = 8$ и $AD = 6$.

- Докажите, что прямые DB и BC перпендикулярны.
- Найдите площадь полной поверхности пирамиды $B_1 ABD$, если $B_1 C = 6\sqrt{2}$.

10 (дз)
нет аналога
11

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на ребре AA_1 отмечена точка K , причём $AK:KA_1 = 1:3$. Через точки K и B проведена плоскость α , параллельная прямой AC и пересекающая ребро DD_1 в точке M .

- Докажите, что точка M – середина ребра DD_1 .
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью α , если $AB = 5$, $AA_1 = 4$.

11 (дз)

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка K делит боковое ребро AA_1 в отношении $AK:KA_1 = 1:2$. Через точки B и K проведена плоскость α , параллельная прямой AC и пересекающая ребро DD_1 в точке M .

- Докажите, что плоскость α делит ребро DD_1 в отношении $DM:MD_1 = 2:1$.
- Найдите площадь сечения, если известно, что $AB = 4$, $AA_1 = 6$.

12

14

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена секущая плоскость, содержащая диагональ AC_1 и пересекающая рёбра BB_1 и DD_1 в точках F и E соответственно.

- Докажите, что сечение AFC_1E – параллелограмм.
- Найдите площадь сечения, если известно, что AFC_1E – ромб и $AB = 3$, $BC = 2$, $AA_1 = 5$.

12 (дз)
нет аналога
13

14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA = 6:1$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1F:FB = 3:4$, а точка T – середина ребра B_1C_1 . Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 30$, $AA_1 = 35$.

- Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
- Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT .

13 (дз)

14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 5 : 3$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1 F : FB = 5 : 11$, а точка T – середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 6\sqrt{2}$, $AD = 10$, $AA_1 = 16$.

- Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
- Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT .

14

14 Точки P и Q – середины рёбер AD и CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ соответственно.

- Докажите, что прямые $B_1 P$ и QB перпендикулярны.
- Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку P и перпендикулярной прямой BQ , если ребро куба равно 4.

14 (дз)

14 Точки P и Q – середины рёбер AD и CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ соответственно.

- Докажите, что прямые $B_1 P$ и QB перпендикулярны.
- Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку P и перпендикулярной прямой BQ , если ребро куба равно 10.

15

14

Дан прямой круговой конус с вершиной M . Осевое сечение конуса – треугольник с углом 120° при вершине M . Образующая конуса равна $2\sqrt{3}$. Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

- Докажите, что полученный в сечении треугольник тупоугольный.
- Найдите площадь сечения.

15 (дз)

нет аналога

16

14 Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Плоскость α проходит через прямую BA_1 параллельно прямой CB_1 .

- Докажите, что плоскость α делит диагональ AC_1 параллелепипеда в отношении 2:1, считая от вершины C_1 .
- Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью α , если он прямой, его основание $ABCD$ – ромб с диагоналями $AC = 24$ и $BD = 10$, а боковое ребро параллелепипеда равно 5.

16 (дз)

нет аналога

17

14 В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ стороны основания равны 5, а боковые рёбра равны 11.

- Докажите, что прямые CA_1 и $C_1 D_1$ перпендикулярны.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины C , A_1 и F_1 .

17 (дз)

нет аналога

18

14

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 4$, $BC = 3$, $AA_1 = 2$. Точки P и Q – середины рёбер $A_1 B_1$ и CC_1 соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро $B_1 C_1$ в точке U .

- а) Докажите, что $B_1 U : UC_1 = 2 : 1$.
 б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью APQ .

18 (дз)
нет аналога
19

14

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 4. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .
 б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .

19 (дз)
нет аналога
20

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{6}$. На рёбрах AB , $A_1 D_1$ и $C_1 D_1$ отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = A_1 N = C_1 K = 1$.

- а) Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром BC . Докажите, что $MNKL$ – квадрат.
 б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

20 (дз)

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания $AB = 6$, а боковое ребро $AA_1 = 4\sqrt{3}$. На рёбрах AB , $A_1 D_1$ и $C_1 D_1$ отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = A_1 N = C_1 K = 1$.

- а) Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром BC . Докажите, что $MNKL$ – квадрат.
 б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

21

14

В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{2}$. На рёбрах AB , $A_1 B_1$ и $B_1 C_1$ отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = B_1 N = C_1 K = 1$.

- а) Пусть L – точка пересечения плоскости MNK с ребром AC . Докажите, что $MNKL$ – квадрат.
 б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

21 (дз)
нет аналога

Объём (пункт б)

14

Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Диагонали боковых граней $AA_1 B_1 B$ и $BB_1 C_1 C$ равны 15 и 9 соответственно, $AB = 13$.

- а) Докажите, что треугольник $BA_1 C_1$ прямоугольный.
 б) Найдите объём пирамиды $AA_1 C_1 B$.

1 (дз)

14

Основанием прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$, $AB = AA_1$.

- Докажите, что прямые $A_1 C$ и BD перпендикулярны.
- Найдите объём призмы, если $A_1 C = BD = 2$.

14

В треугольной пирамиде $SABC$ известны боковые рёбра: $SA = SB = 7$, $SC = 5$. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы CM треугольника ABC . Эта высота равна 4.

- Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
- Найдите объём пирамиды $SABC$.

14

В треугольной пирамиде $SABC$ известны боковые рёбра: $SA = SB = 13$, $SC = 3\sqrt{17}$. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы CM треугольника ABC . Эта высота равна 12.

- Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
- Найдите объём пирамиды $SABC$.

14

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 7. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 4$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

- Докажите, что $A_1 P : PB_1 = 1 : 3$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 B_1$.
- Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α .

14

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

- Докажите, что $A_1 P : PB_1 = 1 : 2$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 B_1$.
- Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α .

14

Основание пирамиды $PABCD$ – трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$. Плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, прямые AB и CD пересекаются в точке K .

- Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.
- Найдите объём пирамиды $PKBC$, если $AB = BC = CD = 3$, а высота пирамиды равна 8.

14

Дана пирамида $PABCD$, в основании – трапеция $ABCD$ с большим основанием AD . Известно, что сумма углов BAD и ADC равна 90 градусов, а плоскости PAB и PCD перпендикулярны основанию, прямые AB и CD пересекаются в точке K .

- Докажите, что плоскость PAB перпендикулярна плоскости PCD .
- Найдите объём $PKBC$, если $AB = BC = CD = 2$, а $PK = 12$.

14

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 8. На рёбрах AA_1 и CC_1 отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = 3$, $CN = 1$.

- Докажите, что плоскость MNB_1 разбивает призму на два многогранника, объёмы которых равны.
- Найдите объём тетраэдра $MNBV_1$.

6 (дз)

14

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 6. На рёбрах AA_1 и CC_1 отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = 2$, $CN = 1$.

- Докажите, что плоскость MNB_1 разбивает призму на два многогранника, объёмы которых равны.
- Найдите объём тетраэдра $MNBV_1$.

7

14

В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 13$, $PB = 15$, $\cos \angle PBA = \frac{48}{65}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C . Прямые PA и BC перпендикулярны.

- Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
- Найдите объём пирамиды $PABC$.

7 (дз)

14

В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 17$, $PB = 10$, $\cos \angle PBA = \frac{32}{85}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C . Прямые PA и BC перпендикулярны.

- Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
- Найдите объём пирамиды $PABC$.

8

14

Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 6. Точки K , L и M — центры граней $ABCD$, $AA_1 D_1 D$ и $CC_1 D_1 D$ соответственно.

- Докажите, что $B_1 KLM$ — правильная пирамида.
- Найдите объём $B_1 KLM$.

8 (дз)

нет аналога

9

14

Плоскость γ , содержащая диагональ BD грани куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с основаниями $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$, пересекает ребро $B_1 C_1$ и делит площадь боковой поверхности куба в отношении 2:1.

- Докажите, что плоскость γ делит ребро $B_1 C_1$ в отношении 2:1, считая от вершины B_1 .
- В каком отношении плоскость γ делит объём куба?

9 (дз)

нет аналога

10

14

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .
- Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C , а основанием – сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α .

10 (дз)

14

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N – середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5:1, считая от точки C .
- Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C , а основанием – сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α .

11

14

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB = 6$, высота $SO = 4$. На апофеме ST грани BSC отмечена точка K так, что $SK = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BC и содержит точки K и D .

- Докажите, что расстояние от точки C до плоскости γ равно расстоянию от точки B до плоскости γ .
- Найдите объём пирамиды, вершина которой точка C , а основание – сечение данной пирамиды плоскостью γ .

11 (дз)

14

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB = 16$, высота $SO = 6$. На апофеме ST грани BSC отмечена точка K так, что $SK = 8$. Плоскость γ параллельна прямой BC и содержит точки K и A .

- Докажите, что расстояние от точки B до плоскости γ равно расстоянию от точки C до плоскости γ .
- Найдите объём пирамиды, вершина которой точка B , а основание – сечение данной пирамиды плоскостью γ .

12

14

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 5, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{5}$. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $CK = 2$, а $C_1 L = 1$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

- Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .
- Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка A_1 , а основание – сечение данной призмы плоскостью γ .

12 (дз)

В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{2}$. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $CK = 4$, а $C_1 L = 1$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

- а) Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .
- б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка A_1 , а основание – сечение данной призмы плоскостью γ .